Verallgemeinerte Dreiecksungleichungen

Michael Kapovich

Wir alle wissen, dass eine gerade Linie die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu einem anderen Punkt ist. Dieses Wissen scheint in den Jahrmillionen der Evolution fest in unseren Gehirnen verdrahtet worden zu sein (so wie auch in den Gehirnen anderer Lebewesen). Dies gilt, unabhängig davon, wer wir sind oder in welcher geometrischer Umgebung wir leben: Menschen, die auf der Oberfläche der Erde laufen, Vögel die in der Luft fliegeln, oder Ameisen, die auf der Oberfläche eines Baumes krabbeln. Mathematiker drücken dieses Prinzip in Form der Dreiecksungleichung aus:

$$c \leq a + b,$$

wobei a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

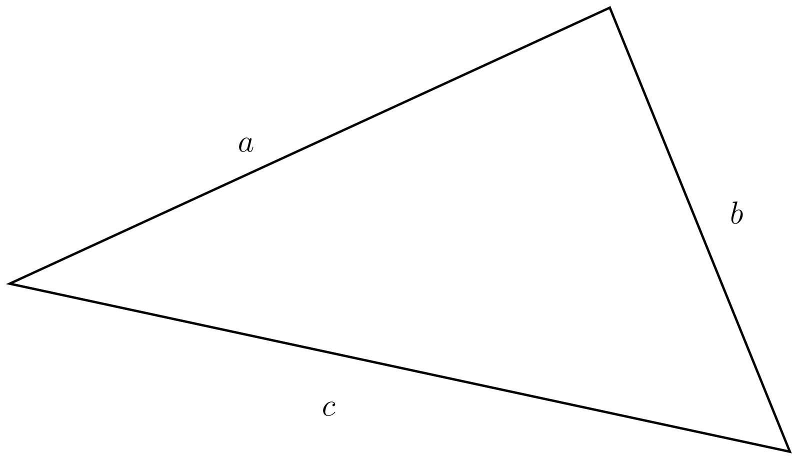

Figure 1: *Dreiecksungleichung:* $c \leq a + b$.

Aus der Schule wissen wir, dass man zu drei positiven Zahlen a, b und c, die dieser Dreiecksungleichung genügen, ein Dreieck in der euklidischen Ebene konstruieren kann, dessen Seitenlängen a, b und c sind. Eine kurze Überlegung zeigt, dass der gleiche elementargeometrische Beweis auch in gekrümmten Räumen funktioniert, wie z.B. in der hyperbolischen Ebene oder in einem hyperbolischen Raum.

Liegen unsere drei Punkte allerdings auf einer Geraden, so ist das entsprechende Dreieck degeneriert und zumindestens eine der Dreiecksungleichungen wird zu der Gleichung $a + b = c$. Daher gibt es für drei Punkte auf einer Geraden eine weitere Einschränkung für die Seitenlängen, die nicht aus der Dreiecksungleichung folgt.

Auf den ersten Blick scheint dies alles zu sein, was man über die Dreiecksungleichungen aussagen kann. Es erweist sich jedoch als nützlich, die folgende Frage zu stellen:

Was ist eigentlich der Abstand zwischen zwei Punkten x und y?

Üblicherweise bekommt man auf diese Frage die Antwort, dass der Abstand die kürzeste Zeit angibt, die man benötigt, um mit Einheitsgeschwindigkeit von x nach y zu reisen. In der euklidischen Ebene oder auch im hyperbolischen Raum jedoch hat der Begriff Distanz (oder Länge) noch eine alternative Bedeutung:

Länge ist ein vollständiges Invariantensystem für gerade Liniensegmente bis auf Kongruenz.

Mit anderen Worten: Zu zwei gegeben Liniensegmenten s_1 und s_2 gibt es genau dann eine starre Raumbewegung, die s_1 nach s_2 transportiert, wenn s_1 und s_2 die gleiche Länge haben.

Nun stellt es sich heraus, dass es *natürliche* Räume gibt, in denen die Kongruenzklasse eines Liniensegments nicht mit einer einzigen Zahl charakterisiert werden kann. Benützt man jedoch einen vektorwertigen Begriff des Abstandes, so erhält man ein vollständiges Invariantensystem. Die Räume, um die es hier geht, heissen *symmetrische Räume*. Die einfachsten Beispiele solcher Räume stammen aus einem Zweig der Mathematik, der *lineare Algebra* heisst. Zum Beispiel ist X_n^+, der Raum der positiv definiten symmetrischen Matrizen, ein symmetrischer Raum. Die vektorwertige Distanzfunktion $\vec{d}$ für X_n^+ nimmt ihre Werte in dem Kegel Δ an, der gegeben ist durch die Ungleichungen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n.$$

Die Komponenten der Distanzfunktion $\vec{d}(A, B)$ sind die Logarithmen der singulären Werte der Matrix $A^{-1}B$. Benützt man diese Interpretation, so lautet das Problem über Dreiecke mit vorgegebenen vektorwertigen Seitenlängen:

Was können wir über die singulären Werte von AB sagen, wenn die von A und B bekannt sind?

Was sind nun symmetrische Räume? Ein symmetrischer Raum ist eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, für den es zu jedem Punkt x in X eine *Symmetrie* σ_x gibt, d.h. eine starre Bewegung auf X, die die Riemannsche Metrik erhält, x auf sich selbst abbildet und jeden Tangentialvektor an x auf sein Negatives abbildet. So ist z. B. in dem Fall $X = X_n^+$ die Symmetrie σ_1 an der Einheitsmatrix gegeben durch die Formel

$$A \mapsto A^{-1}.$$

Die Gruppe der starren Bewegungen eines solchen Raumes ist eine Liegruppe G.

Die für das Folgende wichtigen symmetrischen Räume sind die, die noch zwei weitere Eigenschaften haben: Sie sind einfach zusammenhängend, d.h. jede Schleife lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen, und sie haben eine nichtpositive Krümmung. Jeder so geartete Raum besitzt einen zugehörigen konvexen Kegel Δ im $\mathbb{R}^n$, der *Weylkammer* genannt wird, und eine Distanzfunktion $\vec{d}(p, q)$ zwischen Punkten in X. Die Vektoren $\vec{d}(p, q)$ liegen in dem Kegel Δ und bilden ein vollständiges Invariantensystem für das (geordnete) Punktepaar p, q. Das fundamentale Problem bei gegebenem symmetrischem Raum X lautet dann:

Finde notwendige und hinreichende Bedingungen an ein Tripel von Vektoren λ, μ, ν, sodass es in X ein Dreieck mit Seitenlängen λ, μ, ν gibt.

Es stellt sich heraus, dass die Lösungsmenge dieses Problems aus einem System von linearen Ungleichungen in den Vektoren λ, μ, ν besteht, die wir *verallgemeinerte Dreiecksungleichungen* nennen. Ein erstes solches System von Ungleichungen (für den symmetrischen Raum X_n^+) wurde von Alexander Klyachko berechnet, später von A. Berenstein und R. Sjamaar verallgemeinert, bevor dann der allgemeinste Fall in einer Arbeit von M. Kapovich (MPIM), B. Leeb und J. Millson behandelt wurde. Um einen Eindruck davon zu geben, wie diese Ungleichungen aussehen, wollen wir die einfachste davon betrachten:

$$\lambda \leq_{\Delta^\star} \mu + \nu.$$

Hier bezeichnet $\Delta^\star$ den konvexen Kegel, der aus den Vektoren v besteht, für die für alle u in Δ gilt:

$$u \cdot v \geq 0,$$

wobei $\cdot$ für das Skalarprodukt steht:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n.$$

Für $\Delta = [0, \infty)$ ist z. B. $\Delta^\star = [0, \infty)$. Die Ungleichung

$$\lambda \leq_{\Delta^\star} \mu + \nu$$

bedeutet, dass der Differenzvektor

$$\mu + \nu - \lambda$$

in $\Delta^\star$ liegt. In unserem Beispiel erhalten wir so wieder die gewöhnliche Dreiecksungleichung:

$$\lambda \leq \mu + \nu.$$

Diese Arbeit lässt sich in verschieden Richtungen verallgemeinern. Man kann z. B. *ideale Dreiecke* betrachten, das sind Dreiecke, von denen einige (sagen wir: eine) Ecken "im Unendlichen" liegen können. Natürlich liegt dann diese unendliche Ecke unendlich weit weg von den anderen Ecken, sodass man den Abstandsbegriff erneut neu fassen muss mittels *vektorwertigen Busemannfunktionen.* Wir wollen das einfachste Beispiel eines Problems aus der linearen Algebra beschreiben, das man so lösen kann.

Bevor wir dieses Problem aus der linearen Algebra formulieren, führen wir einige Bezeichnungen ein. Zu einer $n \times n$ Matrix B sei

$$\det_k(B)$$

die Determinante des rechten unteren k mal k Blockes von B. So ist $\det_n(B)$ die Determinante von B und $\det_1(B)$ ist b_{nn}. Wir definieren eine Funktion $f(A)$ durch

$$f(A) = \big(\det_n(AA^T), \ldots, \det_2(AA^T), \det_1(AA^T)\big),$$

wobei A^T die *transponierte* Matrix von A ist. Dann ist das Problem aus der linearen Algebra die Frage nach den möglichen Werten des Vektors $\lambda = f(A)$ bei vorgegebenen singulären Werten μ von A. (Dieses spezielle Problem geht zurück auf Arbeiten von B. Kostant aus den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts.)

Man erhält weitere (und interessantere!) Probleme aus der Algebra, wenn man Paare G, H betrachtet, bestehend aus einer *reduktiven algebraischen* Gruppe G und einer reduktiven algebraischen Untergruppe H. In dem Beispiel oben ist $G = GL_n$ und H die Gruppe der Diagonalmatrizen. Die allgemeine

Antwort auf solche Probleme lautet, dass bei geeigneter Koordinatenwahl die Lösungsmenge durch ein System von linearen Ungleichungen gegeben ist. Diese können durch den *verallgemeinerten Schubert Kalkül* berechnet werden. Die momentan effektivste Weise, solche Ungleichungen zu schreiben, verdanken wir P. Belkale und S. Kumar.

Impulserhaltungssatz: $C_\nu = A_\lambda + B_\mu$

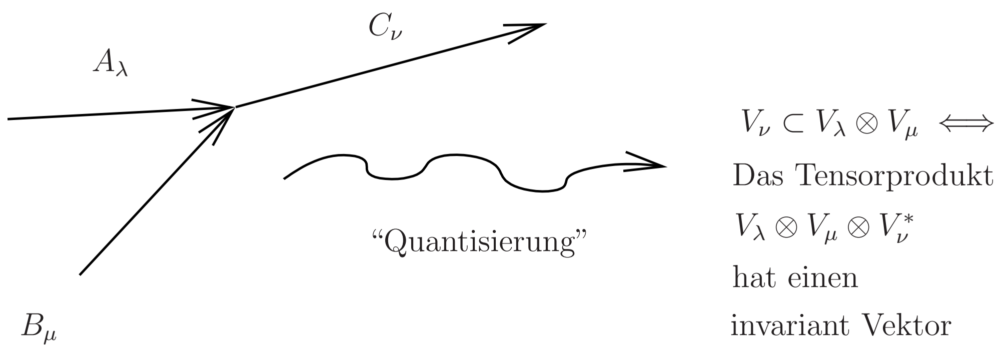

Figure 2: *Von infinitesimalen Dreiecken zu Tensoren.*

Eine weitere Verallgemeinerung der obigen Probleme ergibt sich im Rahmen eines Zweigs der Mathematik, der *Darstellungstheorie* heisst. Vieles aus der modernen Darstellungstheorie ist motiviert durch die Quantenmechanik, in der man klassische Objekte (wie kürzeste Verbindung) durch Quantenobjekte (wie lineare Operatoren) ersetzt. Unter einer Ganzheitsvoraussetzung an die Vektoren λ in der Weylkammer Δ parametrisieren diese irreduzible endlichdimensionale Darstellungen V_λ einer algebraischen Gruppe G, die dem symmetrischen Raum X zugeordnet ist. Die Frage nach der Existenz eines Dreiecks mit vorgegebenen vektorwertigen Seitenlängen wird ersetzt durch die Frage nach der Existenz von nichtverschwindenden G-invarianten Vektoren in dem Dreifachtensorprodukt

$$V_\lambda \otimes V_\mu \otimes V_\nu.$$

Die letztere Frage ist eng verbunden mit dem folgenden klassischen Problem aus der Darstellungstheorie:

Zerlege das Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen $V_\lambda \otimes V_\mu$ in irreduzible Darstellungen von G.

Was ist mit idealen Dreiecken? Auch sie entsprechen den Lösungen eines (anderen) klassischen Problems aus der Darstellungstheorie:

Betrachte eine reduktive Gruppe G und seine Leviuntergruppe H. Zerlege eine irreduzible Darstellung V_μ von G in irreduzible Darstellungen von H.

Es stellt sich heraus, dass die Lösungen der Probleme aus der Darstellungstheorie mehr oder weniger übereinstimmen mit den Lösungen der Probleme aus der Geometrie. Dies wurde zuerst herausgefunden von A. Knutson und T. Tao (für das Tensorprodukt von Darstellungen von GL_n), und später von Kapovich und Millson in grösserer Allgemeinheit. Kürzlich wurden diese Resultate noch verbessert durch P. Belkale und S. Kumar. Bis zu welchem Grad man "mehr oder weniger übereinstimmen" durch "sind identisch" ersetzen kann, ist ein Gegenstand der momentanen Forschung.

Wir kommen jetzt zurück zu unserem ursprünglichen Problem über Dreiecksungleichungen mit dem ursprünglichen Distanzbegriff $d(x, y)$. In vielen interessanten Fällen kann diese Distanz folgendermaßen berechnet werden. Nehme zwei Punkte x und y und betrachte alle stetigen Wege p von x nach y. Dann erhält man die Distanz $d(x, y)$ als das Minimum der Längen aller Wege p.

Diese Definition des Abstands stimmt mit unserem intuitiven Abstandsbegriff überein, und er gilt in vielen wichtigen Fällen, wie z.B. für Riemannsche Mannigfaltigkeiten und für *Graphen*. In diesem Zusammmenhang kann man fragen:

Sind die ursprünglichen Dreiecksungleichungen $c \leq a + b$ die einzigen Einschränkungen an die Seitenlängen eines Dreiecks in einem Raum X?

Hat der Raum einen endlichen Durchmesser, so ist die Antwort natürlich "Nein", da alle drei Längen a, b, c durch den Durchmesser nach oben beschränkt sind. Andere Beispiele mit zusätzlichen Einschränkungen sind die Gerade (in der alle Dreiecke degeneriert sind) und die Halbgerade.

Im Jahr 1999 hat M. Gromov die Frage gestellt, *ob diese drei Klassen von Räumen im Wesentlichen die einzigen sind, für die die gewöhnlichen Dreiecksungleichungen nicht ausreichen, die Existenz eines Dreiecks mit vorgegebenen Seitenlängen zu garantieren.*

Es stellt sich heraus, dass die Antwort auf diese Frage "Ja" lautet:

Ein geodätischer metrischer Raum X ist quasiisometrisch zu einem Punkt, einer Halbgeraden oder zu einer Geraden genau dann, wenn die gewöhnlichen

Dreiecksungleichungen nicht ausreichen, die Existenz eines Dreiecks mit vorgegebenen Seitenlängen zu garantieren.

Die Eigenschaft, *quasiisometrisch zu einem Punkt, zu einer Halbgeraden oder einer Geraden zu sein*, bedeutet, dass X entweder einen endlichen Durchmesser hat, oder nahe an einer Halbgeraden oder einer Geraden ist.