

SUR L'ALGÈBRE FONCTIONNELLE

Par PÁL TURÁN (Budapest)

L'étude des conséquences qu'on peut tirer sur les racines d'un polynôme de n -ième degré de la connaissance de ses coefficients se trouve parmi les plus anciens problèmes de l'algèbre et développait dans les mains de *Descartes*, *Newton*, *Fourier*, *Sturm*, *Cauchy*, *Hermite*, *Laguerre* et des autres en une théorie féconde. Mais l'algèbre fait passer dans nos jours cette belle théorie — qui pourrait être nommée algèbre fonctionnelle — à l'analyse ; c'est la conséquence d'une part de la marche naturelle de l'évolution, d'autre part du fait que l'on pouvait considérer ses problèmes comme clos où des nouveaux points de vue ne se posaient pas. C'est naturel qu'on ne peut pas et il ne faut pas reculer l'aiguille de l'horloge de l'évolution ; mais je voudrais montrer en connexion avec un problème classique de l'analyse que l'on trouve des régions blanches étendues sur la carte de l'algèbre fonctionnelle. Il s'agira de la formulation principale d'un simple point de vue qui n'est pas entièrement nouveau, ensuite des premiers simples résultats qui s'y rattachent et de quelques questions s'imposant dans cette direction.

Le problème que je viens de mentionner, c'est le problème central de la théorie analytique des nombres, l'hypothèse de Riemann, qui, tout en restant dans l'arrière-plan donna l'inspiration aux travaux correspondants de *Laguerre*, *Jensen*, *Pólya*, *I. Schur* et d'autres. $s = \sigma + it$ étant une variable complexe, il s'agira de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, définie dans le demi-plan $\sigma > 1$ par la série

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s}.$$

On sait bien que cette fonction peut être prolongée analytiquement dans le plan entier, excepté le pôle de premier ordre dans le point $s = 1$ et que ses racines non-triviales, situées dans la bande $0 < \sigma < 1$, sont en relation intime avec les nombres premiers. On connaît ensuite les conséquences importantes dans la théorie des nombres qu'on pourrait tirer si l'hypothèse de Riemann mentionnée ci-dessus, selon laquelle les racines non-triviales de $\zeta(s)$ sont situées

toutes sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ était démontrée. On sait qu'une grande partie de ces conséquences s'ensuivrait déjà si l'on avait un $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ tel que les racines non-triviales seraient situées dans la bande

$$\vartheta \leq \sigma \leq 1 - \vartheta \quad (1)$$

ce qui est encore une question indécise jusqu'ici. En introduisant au lieu de $\zeta(s)$ la fonction

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

et au lieu de s la variable $z = x + iy$ avec $s = \frac{1}{2} + iz$ nous obtenons en $\xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) = E(z)$ une fonction entière transcendente dont les racines seraient réelles ou seraient situées dans la bande $|y| \leq \frac{1}{2} - \vartheta$ si l'hypothèse originelle de Riemann respectivement la proposition (1) plus faible étaient vraies.

La question se pose maintenant, quelle est la représentation analytique la plus convenable pour démontrer que les racines de la fonction représentée sont situées dans une bande ou même qu'elles sont toutes réelles? La représentation la plus évidente est celle de la série de Taylor. Mais que ce n'est pas convenable pour notre but, on le voit d'une part du fait qu'on ne connaît point de condition suffisante *simple* pour conclure dans la connaissance des coefficients d'une série entière que toutes les racines de la somme sont réelles, d'autre part du fait que la vérification des conditions connues *nécessaires et suffisantes* impose dans les cas donnés des difficultés qui paraissent invincibles. Les mêmes difficultés s'imposent déjà dans le cas où la série est finie, donc où il s'agit d'un polynôme rationnel. Comme le cas des polynômes contient les germes des difficultés du cas général, considérons la question, quelle représentation des polynômes est la plus convenable pour démontrer que leurs racines sont réelles ou sont situées dans une bande.

Le raisonnement heuristique suivant nous y conduira. En écrivant le polynôme dans la forme

$$V(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}, \quad (2)$$

nous pouvons conclure des coefficients *d'une façon simple* que certaines régions circulaires contiennent toutes les racines de $V(z)$. Ça doit être ainsi, puisque les courbes de niveau des fonctions z^{ν} sont des cercles concentriques. Si nous voulons donc trouver *d'une manière simple* une bande qui contient toutes les racines du polynôme, nous devons peut-être réarranger le polynôme suivant des polynômes dont les courbes de niveau sont «essentiellement» des droites parallèles

à l'axe réelle. Tels sont p. ex. les polynômes d'Hermité définis par la formule

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}). \quad (3)$$

Nous sommes arrivées donc à l'idée que dans les questions de la réalité des racines d'un polynôme il est probablement utile de considérer sa représentation d'Hermité

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} H_{\nu}(z). \quad (4)$$

On peut aussi énoncer cette idée d'une façon plus générale. Un domaine K , dont la frontière consiste p. ex. d'un nombre fini d'arcs de Jordan, et un point $P \in K$ étant donnés, agrandissons le domaine K du centre P avec le coefficient d'agrandissement λ , où λ varie de 0 à l'infini. Nous obtenons ainsi les domaines K_{λ} . Pour caractériser le fait que toutes les racines d'un polynôme sont situées dans un domaine K_{λ_0} et pour l'étude des questions qui s'y rattachent, on doit partir de la représentation

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} \varphi_{\nu}(z) \quad (5)$$

du polynôme, où les courbes de niveau des polynômes $\varphi_{\nu}(z)$ sont «essentielle-ment» les frontières des domaines K_{λ} .

L'idée que, pour gagner de simples critères sur la réalité des racines, au lieu de la représentation (2) du polynôme — que j'appellerai représentation de Vieta — une autre représentation est peut-être plus convenable, figure déjà dans la littérature. Nous arrivons au plus simple critère de cette sorte si nous considérons la représentation

$$T(z) = \sum_{\nu=0}^n d_{\nu} T_{\nu}(z) \quad (6)$$

du polynôme, où $T_{\nu}(z)$ désigne le ν -ième polynôme de Tchébycheff du premier genre, défini par la formule

$$T_{\nu}(\cos \vartheta) = \cos \nu \vartheta.$$

On voit alors aisément que si p. ex.

$$|d_n| > \sum_{\nu=0}^{n-1} |d_{\nu}|$$

alors toutes les racines de $T(z)$ sont réelles et chacun des intervalles

$$\cos \frac{\nu \pi}{n} < z < \cos \frac{(\nu-1) \pi}{n} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

contient exactement une racine. Ou je pense au théorème plus profond de Pólya et Szegő, selon lequel, si l'on a

$$0 \leq d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n \quad (7)$$

alors toutes les racines de $T(z)$ sont réelles et chaque intervalle

$$\cos \frac{(\mu + \frac{1}{2})\pi}{n + \frac{1}{2}} < z < \cos \frac{(\mu - \frac{1}{2})\pi}{n + \frac{1}{2}} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

contient exactement une racine de $T(z)$. Mais à ce que je sais, on n'a pas essayé d'insérer ces théorèmes dans une théorie et de construire l'algèbre fonctionnelle des représentations autres que celle de Vieta, excepté un domaine. C'est l'ordre d'idées de la règle de Descartes; mais on voit des recherches de Schoenberg, Obrechhoff et d'autres que, pour être bref, la règle de signe basée sur la représentation (2) de Vieta donne une meilleure évaluation pour le nombre des racines positives que les règles de signe basées sur d'autres représentations. Mais que ce point de vue est capable de produire quelque chose de principalement nouveau sur ce champ, je l'ai montré aussi récemment dans une petite note. C'est un trait commun des règles de signe basées sur les représentations différentes du polynôme qu'elles donnent une évaluation *supérieure* pour le nombre de racines situées dans un certain intervalle réel dans la connaissance des changements de signe d'une suite formée des coefficients et de leurs sommés partielles itérées. Si nous considérons maintenant les polynômes de Laguerre définies par la formule

$$L_\nu(z) = \frac{e^z}{\nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} (e^{-z} z^\nu)$$

on connaît bien que leurs courbes de niveau sont essentiellement des paraboles dont le foyer se trouve à l'origine et l'axe est identique à l'axe positive. En vertu du principe heuristique que nous venons de trouver, la représentation

$$L(z) = \sum_{\nu=0}^n e_\nu L_\nu(z) \quad (8)$$

de Laguerre du polynôme est à considérer pour étudier les racines positives. J'ai trouvé dans ma note mentionnée que la suite formée des différences successives de coefficients de la représentation de Laguerre

$$e_0, (e_0 - e_1), (e_0 - 2e_1 + e_2), \dots, (e_0 - \binom{n}{1}e_1 + \binom{n}{2}e_2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}e_n)$$

donne une borne *inférieure* pour le nombre des racines positives avec le nombre des changements de signe.

Notre première question sera donc si la représentation d'Hermite serait réellement convenable à l'étude des questions sur la réalité des racines respectivement à la limitation de la partie *imaginaire* des racines par les coefficients b_p , d'une façon simple et tout de même bonne, ou tout court : d'une façon »naturelle«. Les résultats que je mentionnerai d'abord donnent une réponse affirmative à la deuxième partie de la question. On a pour la représentation (2) de Vieta l'évaluation classique de *Cauchy* : si

$$\max_{0 < p < n-1} |a_p| = A, \quad (9)$$

alors toutes les racines du polynôme sont situées dans le cercle

$$|z| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}. \quad (10)$$

En analogie de ce théorème, j'ai démontré pour la représentation d'Hermite que si l'on a

$$\max_{0 < p < n-1} |b_p| = B, \quad (11)$$

alors toutes les racines du polynôme sont situées dans la bande

$$|Iz| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B}{|b_n|} \right). \quad (12)$$

L'évaluation (10) ne peut pas être remplacée par un cercle

$$|z| \leq \vartheta \left(1 + \frac{A}{|a_n|} \right)$$

où $0 < \vartheta < 1$, similairement, on ne peut pas remplacer la bande (12) par la bande

$$|Iz| \leq \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \frac{B}{|b_n|} \right).$$

ce qu'on peut montrer par un exemple convenable.

Puisque l'évaluation (10) donne une borne pour $|Iz|$, la question se pose, si (10) ne contient pas (12). Il est aisé de voir déjà sur l'exemple $V(z) = H(z) = H_n(z)$ qu'il n'en est pas ainsi. Car (12) donne dans ce cas (B étant 0)

que les racines du polynome sont situées dans la bande $|Iz| \leq \frac{1}{2}$ (elles sont toutes réelles, comme on le sait). On sait bien ensuite que la plus grande racine positive de $H_n(z)$ est asymptotiquement égale à $\sqrt{2n+1}$ pour n grand; le rayon du cercle (10) est donc au moins $\sqrt{2n+1}$; c'est à dire, la limitation pour la partie imaginaire des racines donnée par (10) est sûrement plus faible que celle de $|Iz| \leq 2n+1$, ce qui est essentiellement plus faible que celle de (12).

Mais ils subsistent d'autres théorèmes parallèles entre les représentations de Vieta et d'Hermite. J'en mentionnerai deux. Selon un théorème de *Walsh* concernant la représentation de Vieta, toutes les racines du polynome sont situées dans le cercle.

$$|z| \leq \left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{\frac{1}{n}} + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|^{\frac{1}{n-1}} + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = A_1. \quad (13)$$

Le théorème correspondant sur la représentation d'Hermite affirme que toutes les racines du polynome sont situées dans la bande

$$|Iz| < \left| \frac{b_0}{b_n} \right|^{\frac{1}{n}} + \left| \frac{b_1}{b_n} \right|^{\frac{1}{n-1}} + \dots + \left| \frac{b_{n-1}}{b_n} \right| = B_1. \quad (14)$$

L'exemple du polynome

$$H(z) = H_n(z) + \varepsilon H_{n-1}(z) + \varepsilon^2 H_{n-2}(z) + \dots + \varepsilon^n H_0(z), \quad (15)$$

où ε est un petit nombre positif, montre que cette évaluation est éventuellement meilleure que celle de (12). Cette dernière borne les racines sur la bande $|Iz| \leq \frac{1}{2}$, l'évaluation (14) donne par contre $B_1 = n\varepsilon$, ce qui tend vers 0 avec ε . D'autre part, selon une remarque de *Takeya*, si les coefficients a_ν de la représentation de Vieta sont positifs, alors les racines du polynome sont toutes situées dans le cercle

$$|z| \leq \max \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \dots, \frac{a_0}{a_1} \right) = A_2. \quad (16)$$

Similairement, si les coefficients b_ν de la représentation d'Hermite sont positifs, alors les racines du polynome sont toutes situées dans la bande

$$|Iz| < \max \left(\frac{b_{n-1}}{b_n}, \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}, \dots, \frac{b_0}{b_1} \right) = B_2. \quad (17)$$

Dans le cas du polynome (15), ceci donne la bande $|Iz| < \varepsilon$, ce qui est une meilleure évaluation que celle de (14).

Tous ces résultats laissent entrevoir que la représentation d'Hermite d'un polynôme est réellement plus convenable à l'évaluation de la partie imaginaire des racines que celle de Vieta. Avant de passer aux résultats d'un type différent, je mentionne deux résultats plus spéciaux appartenant dans cet ordre d'idées. On voit aisément que la représentation d'Hermite de la fonction $E(z)$ de Riemann est de la forme

$$E(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} b'_{2\nu} H_{2\nu}(z) \quad (18)$$

où les coefficients $b'_{2\nu}$ sont positifs. Ceci nous conduit à l'idée d'étudier la représentation d'Hermite des polynômes pairs de la forme

$$H^*(z) = \sum_{\nu=0}^k b^*_{2\nu} H_{2\nu}(z) \quad (19)$$

et, comme une nouvelle spécialisation, celle des polynômes de la forme

$$H^{**}(z) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{\nu} b^{**}_{2\nu} H_{2\nu}(z) \quad (20)$$

avec $b^{**}_{2\nu} > 0$, correspondant à la représentation (18). Ce qui concerne les polynômes $H^*(z)$, l'évaluation (12) peut être améliorée essentiellement; les racines de $H^*(z)$ sont situées toutes dans la bande

$$|Iz| < \frac{\lambda}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{B^*}{|b^*_{2k}|} \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{B}{|b_{2k}|} \right) \quad (21)$$

où λ est une constante numérique. Le même théorème affirme dans une autre forme que si l'on a

$$\max_{\nu=0, 1, \dots, (k-1)} \frac{|b^*_{2\nu}|}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)\dots k}} = B^*_0, \quad (22)$$

alors toutes les racines de $H^*(z)$ sont situées dans la bande

$$|Iz| \leq 2\sqrt{2} \left(1 + \frac{B^*_0}{|b^*_{2k}|} \right). \quad (23)$$

La constante $2\sqrt{2}$ peut être remplacée par une plus petite par une évaluation plus soigneuse. L'autre résultat mentionné donné pour les racines de $H^*(z)$

un domaine borné par des arcs d'hyperbole. En désignant la variable complexe par

$$z = x + iy \quad (24)$$

les racines de $H^*(z)$ sont situées dans le domaine

$$|xy| \leq \frac{3}{4} \left(1 + \frac{B^*}{|b_{2k}^*|} \right). \quad (25)$$

En retournant dans notre premier ordre d'idées, nous devons voir maintenant qu'au moyen des coefficients de la représentation d'Hermite on peut donner d'une manière simple des critères involvant la réalité de toutes les racines. On peut démontrer que toutes les racines de $H(z)$ sont réelles si les coefficients b_ν sont réelles et

$$\max(|b_0|, |b_1|, \dots, |b_{n-2}|) \leq |b_n| \sqrt{2n-2}. \quad (26)$$

On a la même conclusion si l'on a seulement

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} |b_\nu|^2 2^\nu \cdot \nu! < |b_n|^2 2^n (n-1)!. \quad (27)$$

En écrivant $H(z)$ dans la forme

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^n \frac{\beta_\nu}{\sqrt{2^\nu \nu!}} H_\nu(z), \quad (28)$$

toutes les racines de $H(z)$ sont réelles si l'on a

$$n \sum_{\nu=0}^{n-2} |\beta_\nu|^2 < |\beta_n|^2. \quad (29)$$

Vu la forme (18) de la fonction $\Xi(z)$, les théorèmes concernant les polynômes plus spéciaux $H^{**}(z)$ sont de nouveau intéressants. On peut démontrer que si l'on a pour ses coefficients

$$\frac{b_{2\nu+2}^{**}}{b_{2\nu}^{**}} > \frac{1}{4} \quad (\nu = 0, 1, \dots, (k-1)), \quad (30)$$

alors toutes les racines de $H^{**}(z)$ sont réelles et de premier ordre. Des raisonnements concernant la fonction $\Xi(z)$ nous mènent à considérer le polynôme

dans la forme

$$H^{***}(z) = \beta'_0 H_0(z) - \frac{\beta'_2}{2^2 \cdot 2!} H_2(z) + \frac{\beta'_4}{2^4 \cdot 4!} H_4(z) - \dots + (-1)^k \frac{\beta'_{2k}}{2^{2k} (2k)!} H_{2k}(z); \quad (31)$$

Je n'ai pas réussi à décider si la condition

$$0 < \beta'_0 < \beta'_2 < \beta'_4 \dots < \beta'_{2k} \quad (32)$$

pour $H^{***}(z)$ entraîne la réalité de toutes les racines de $H^{***}(z)$ ou non. À cause de quelques analogies avec les séries trigonométriques, il présente quelque intérêt de remarques que la somme de la série

$$H^{****}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta''_{2\nu}}{(2\nu)!} H_{2\nu}(z) \quad (33)$$

est non-négative sur l'axe réelle, elle est même une fonction totalement monotone de z sur l'axe positive, pourvu que l'on ait

$$\beta''_0 \geq \beta''_2 \geq \beta''_4 \geq \dots \geq 0. \quad (34)$$

Le théorème (30) impose une question intéressante. Sa démonstration montre que si la condition (30) n'est valable que pour $\nu = 0, 1, 2, \dots, (l-1)$ où $l < k$, alors le polynome a au moins $2l$ changements de signe. Ceci reste vrai si les coefficients $b_{2l+2}, b_{2l+4}, \dots, b_{2k}$ varient d'une manière quelconque pourvu qu'il restent réels. Cela nous rappelle tout de suite les résultats de l'ordre d'idées de *Picard* et *Landau* concernant la représentation de Vieta, selon lesquels au moins p racines du polynome $V(z)$ sont situées dans un cercle dont le rayon ne dépend que de $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+h}, h$ et p ($h \geq 0, p+h \leq n$). Nos résultats antérieurs suggèrent que pour $b_0, b_1, \dots, b_{p-1}, b_{p+h}, h$ et p ($h \geq 0, p+h \leq n$) fixes, les parties imaginaires d'au moins p racines du polynome (4) restent bornées, si les autres coefficients varient. Je n'ai pas réussi à démontrer ce fait jusqu'ici, seulement pour le cas $p = 1$, où un théorème bien plus général est encore valable si nous admettons une dépendance de n aussi.

Retournons maintenant à notre hypothèse — étayée déjà en certaine mesure — que la représentation d'Hermite est un moyen plus convenable que celle de Vieta pour reconnaître si les racines d'un polynome sont réelles ou sont situées dans une bande symétrique à l'axe réelle. Nous pouvons prouver cette hypothèse par une autre voie encore. Considérons les polynomes

$$V(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu} \quad (2)$$

et

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^{n_1} a_{\nu} H_{\nu}(z) \quad (35)$$

en parallèle. Il n'est pas difficile de démontrer que si toutes les racines de $V(z)$ sont réelles, il en est de même pour $H(z)$. Cela veut dire que si nous trouvons dans l'espace à $(n+1)$ dimensions des coefficients (a_0, a_1, \dots, a_n) un domaine tel que les racines des polynômes $V(z)$ correspondant à ses points sont toutes réelles, alors celles des polynômes (35) $H(z)$ correspondant aux points du même domaine sont aussi réelles. C'est à dire, il est «plus facile» de trouver un domaine de coefficients dont les points donnent des polynômes avec des racines réelles pour les polynômes (35) que pour ceux de (2). Cette proposition peut être généralisée en deux directions; les démonstrations correspondantes sont un peu plus difficiles. On peut démontrer d'abord que les racines de $H(z)$ peuvent être limitées à une bande plus étroite symétrique à l'axe réelle que celles de $V(z)$. D'une façon plus précise, si les racines de $V(z)$ sont toutes situées dans la bande $|y| \leq C$, alors celles de $H(z)$ sont situées dans la bande $|y| \leq \frac{1}{2}C$. La deuxième généralisation concerne les polynômes à coefficients réels a_{ν} et affirme que dans ce cas $H(z)$ a au moins autant de racines réelles que $V(z)$, (en comptant naturellement les racines selon leurs multiplicités). Tous les deux théorèmes montrent la tendance qu'en écrivant $H_{\nu}(z)$ au lieu de z^{ν} , les racines du polynôme s'approchent de l'axe réelle. Je n'ai pas réussi à décider si la proposition suivante (qui contiendrait les deux généralisations antérieures) était valable: le polynôme $V(z)$ a autant de racines au plus dans la bande $|y| \leq D$ que le polynôme $H(z)$ dans la bande $|y| \leq \frac{1}{2}D$. J'ai réussi par contre à démontrer qu'en remplaçant $V(z)$ par $H(z)$, non seulement le nombre des racines réelles ne diminue pas, mais le nombre des lieux de changement de signe non plus.

Mais, comme les têtes coupées de l'hydre de Lerne, un problème résolu fournit deux nouveaux; la question s'impose ainsi, si la correspondance trouvée entre les représentations de Vieta et d'Hermitte avec les mêmes coefficients est un phénomène isolé ou non. Il est aisé de démontrer qu'une telle correspondance existe entre $V(z)$ et les polynômes $T(z)$ (6) dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, c'est à dire, $T(z)$ a ici au moins autant de racines réelles que $V(z)$. La situation reste semblable si nous comparons à $V(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ au lieu de $T(z)$ le polynôme

$$U(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} U_{\nu}(z) \quad \left(U_{\nu}(\cos \vartheta) = \frac{\sin(\nu+1)\vartheta}{\sin \vartheta} \right).$$

Pour une suite de polynômes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ normée et orthogonale par rapport à un poids quelconque $\psi(x)$ intégrable et borné inférieurement par un nombre

positif dans $-1 \leq x \leq 1$, tout dépend du comportement de la fonction

$$G(x, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}(x) w^{\nu}$$

qui est holomorphe pour $|w| < 1$, comme le montre un raisonnement heuristique. En vertu de ce raisonnement, le nombre des racines de $V(z)$ (v. (2)) entre -1 et $+1$ ne dépasse pas celui des racines de

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z)$$

dans le même intervalle, pourvu que le déterminant de Wronski des fonctions

$$G(x_1, w), G(x_2, w), \dots, G(x_j, w)$$

ne s'annule pas pour $-1 < w < 1$ et son signe ne dépende que de j ; où x_1, x_2, \dots, x_j désignent pour un nombre naturel j quelconque des nombres tels qu'on ait

$$1 > x_1 > x_2 > \dots > x_j > -1.$$

Je n'ai réussi jusqu'ici à démontrer ce fait correctement.

En retournant à la mise en parallèle des représentations d'Hermite et de Vieta, il y a un point où la représentation de Vieta conduit aux résultats suffisamment simples concernant la réalité des racines. Je pense ici en premier lieu au beau théorème de *Laguerre* selon lequel, si toutes les racines de $V(z)$ sont réelles, alors toutes les racines du polynome

$$V_*(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} g(\nu) z^{\nu}$$

sont aussi réelles, ou $g(t)$ est un polynome arbitraire n'ayant que des racines négatives. Est-ce qu'un théorème semblable, simple et élégant, subsiste pour la représentation d'Hermite? La réponse à cette question est affirmative; si l'on a

$$H(z) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(z),$$

$$H_*(z) = \sum_{k=0}^n a_k g(k) H_k(z),$$

où toutes les racines de $H(z)$ sont réelles, alors il en est ainsi de $H_*(z)$ aussi,

pourvu que $g(t)$ soit un polynôme n'ayant que des racines négatives. La démonstration n'est pas difficile, quoique le théorème n'est point une conséquence de celui de Laguerre.

Comme on le voit, la théorie comparative des représentations différentes des polynômes se trouve encore à son commencement. C'est la situation même dans la théorie de la représentation d'Hermite, quoique c'est de cette représentation que nous sommes occupés la plupart, car elle semblait être un moyen plus convenable que celle de Vieta dans les questions concernant la réalité des racines. Nous ne nous sommes pas occupés — au delà des questions irrésolues mentionnées plus haut — du problème de donner des conditions explicites nécessaires et suffisantes en utilisant les coefficients de la représentation d'Hermite pour que toutes les racines du polynôme soient réelles. Ce n'est pas impossible que ces conditions n'obtiennent pas la plus simple forme en correspondance avec la représentation d'Hermite, mais avec une autre représentation. Nous ne connaissons non plus les « vraies » analogies des formules importantes de Newton—Waring, quoiqu'il est facile de transcrire les formules originelles de Newton—Waring sous une forme où les coefficients d'Hermite figurent et au lieu des sommes de puissance des racines les quantités

$$\sigma_\nu = H_\nu(z_1) + H_\nu(z_2) + \dots + H_\nu(z_n).$$

À tous ces problèmes et aux questions de nature arithmétique de la théorie que je n'ai pas énoncées explicitement, je désire retourner plus tard.