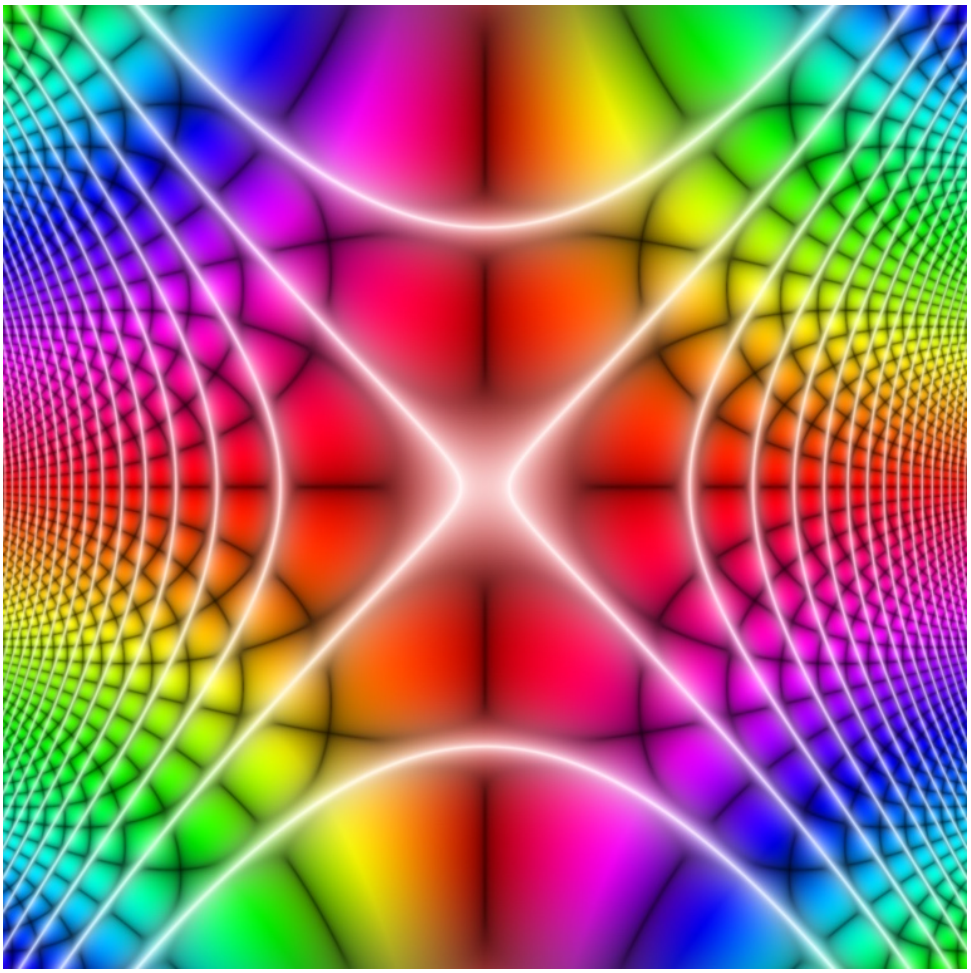
Funktionentheorie - Vorlesungsnotizen

Dan Romik



About this document. These notes were created for use as primary reading material for the graduate course *Math 205A: Complex Analysis* at UC Davis.

The current 2020 revision (dated September 2, 2020) updates my earlier version of the notes from 2018. With some exceptions, the exposition follows the textbook *Complex Analysis* by E. M. Stein and R. Shakarchi (Princeton University Press, 2003).

This German translation of the original English version was contributed by an anonymous reader.

Acknowledgements. I am grateful to Christopher Alexander, Jennifer Brown, Brynn Caddel, Keith Conrad, Bo Long, Anthony Nguyen, Jianping Pan, and Brad Velasquez for comments that helped me improve the notes. Figure 5 on page 22 was created by Jennifer Brown and is used with her permission.

I am deeply grateful to an anonymous contributor for the German translation, added German-language and French-language bibliographies, and formatting improvements.

Complex Analysis Lecture Notes

Document version: September 2, 2020

Copyright © 2019 by Dan Romik

Email comments and feedback to romik@math.ucdavis.edu

Cover figure: a heat map plot of the entire function $z \mapsto z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$.
Created with Mathematica using code by Simon Woods, available at
http://mathematica.stackexchange.com/questions/7275/how-can-i-generate-this-domain-coloring-plot

Inhaltsverzeichnis

1 Warum Funktionentheorie studieren? 1

2 Der Fundamentalsatz der Algebra 3

3 Analytische Funktionen 6

4 Potenzreihen 11

5 Kurvenintegrale 14

6 Cauchyscher Integralsatz 18

7 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz 21

8 Nullstellen, Pole, und der Residuensatz 29

9 Meromorphe Funktionen und die Riemannsche Zahlenkugel 32

10 Das Argumentprinzip 34

11 Anwendungen des Satzes von Rouché 37

12 Einfach zusammenhängende Gebiete - der Satz von Cauchy 38

13 Der Logarithmus 41

14 Euler's Gamma-Funktion 43

15 Die Riemannsche Zeta-Funktion 49

16 Der Primzahlsatz 59

17 Einführung in die asymptotische Analysis 64

Probleme 75

Projektvorschläge 98

Englische Literatur 100

Deutsche Literatur 101

Französische Literatur 101

1 Warum Funktionentheorie studieren?

Dies ist eine Vorlesungsmitschrift zur **Funktionentheorie**, das Gebiet der Mathematik, in dem analytische Funktionen einer komplexen Variablen und ihre Eigenschaften studiert werden. Das klingt zwar sehr speziell, es gibt aber (mindestens) zwei sehr gute Gründe, Funktionentheorie zu studieren. Erstens ist sie meiner Meinung nach eines der schönsten Gebiete, dem ich in der Mathematik begegnet bin. Ich möchte es so sagen: Die Funktionentheorie hat einen sehr hohen Quotienten aus Sätzen und Definitionen (d.h. eine sehr kleine „Entropie“): Man bekommt sehr viel mehr „output“, als „input“ erforderlich ist. Der zweite Grund sind die vielen Anwendungen der Funktionentheorie (sowohl in der reinen Mathematik als auch in der angewandten), also in zwei Gebieten, die zunächst wenig mit komplexen Zahlen zu tun zu haben scheinen. Zum Beispiel:

- Lösen von Polynomgleichungen: Historisch war das der Grund für die Einführung komplexer Zahlen durch Cardano, , der die berühmte Formel zur Lösung der 1543kubischen Gleichung veröffentlichte, nachdem er die früher von Scipione del Ferro gefundene Lösung kennengelernt hatte. Wichtig ist, daran zu denken, dass Cardano's Formel erfordert, manchmal in der komplexen Ebene zu rechnen, als Zwischenschritt auf dem Weg zur endgültigen Lösung – und zwar auch dann, wenn die Lösungen der kubischen Gleichung alle reell sind.

  Beispiel 1. Mit Hilfe von Cardano's Formel kann man als Lösungen für die kubische Gleichung
  $$z^3 + 6z^2 + 9z + 3 = 0$$
  finden:
  $$\begin{aligned} z_1 &= 2\cos(2\pi/9) - 2, \\ z_2 &= 2\cos(8\pi/9) - 2, \\ z_3 &= 2\sin(\pi/18) - 2. \end{aligned}$$

- Beweis von Stirling's Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. Hier ist $a_n \sim b_n$ die standardmäßige „asymptotisch zu“-Relation, welche definiert ist als $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

- Beweis des Primzahlsatzes: $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$, wobei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen bezeichnet, die kleiner oder gleich n sind (die Primzahlen zählende Funktion).

- Beweis vieler weiterer asymptotischer Beziehungen in Zahlentheorie und Kombinatorik, z.B. (um ein weiteres meiner Lieblingsbeispiele zu nennen), die Hardy-Ramanujan-Formel
  $$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}},$$
  wobei $p(n)$ die Anzahl der ganzzahligen Unterteilungen von von n ist.

- Auswertung homplizierter definiter Integrale, z.B. von
  $$\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(In älteren Lehrwerken wurde diese Anwendung sehr betont und sie ist bekannt als Verursacher milder Formen von „post-traumatischem Stress“.)

- Lösung von Physikproblemen in der Hydrostatik, Wärmeleitung, Elektrostatik und mehr.

- Analyse von Wechselstrom-Netzwerken durch Erweiterung des Ohm'schen Gesetzes durch elektrische Impedanz. Die Funktionentheorie hat auch viele weitere Anwendungen im „electric engineering“, in der Signalverarbeitung und in der Kontrolltheorie.
- Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik, z.B. die Cardy-Smirnov-Formel in der Perkolationstheorie und auf dem Gebiet konnektiver Konstanten für selbst-vermeidende Wege auf einem hexagonalen Gitter.
- Konforme Abildungen, die in rein geometrischen Anwendungen auftreten, in denen die algebraische oder analytische Struktur irrelevant zu sein scheint, hängen in Wahrheit tiefgehend mit Funktionentheorie zusammen. Konforme Abbildungen wurden von dem holländischen Künstler M.C. Escher benutzt (obwohl er mathematisch nicht trainiert war), um verblüffende Kunstwerke zu erzeugen. Andere benutzten Funktionentheorie, um Eschers Werke besser zu verstehen oder sogar zu verbessern. Siehe Abbildung 1, und siehe [10] zu mehr Verbindungen von Eschers Arbeiten mit der Mathematik.

Abbildung 1: *Druckgallerie*, eine Lithografie von M.C. Escher. Über sie wurde herausgefunden, dass sie auf einer mathematischen Struktur beruht, die für eine gewisse komplexe Zahl α mit der Funktion $z \mapsto z^\alpha$ zusammenhängt, obwohl sie von Escher nur mit Hilfe geometrischer Intuition konstruiert wurde. Beachten Sie auch das Papier [8] und diese Website, welche animierte Versionen von Eschers Lithografie enthält, erzeugt mit Hilfe von Funktionentheorie.

- Erst 2016 wurde bewiesen, dass die optimalen Dichten für Kugelpackungen in 8 und 24 Dimensionen gleich $\pi^4/384$ bzw. gleich $\pi^{12}/12!$ sind. Die Beweise nutzen auf spektaku-

läre Weise die Funktionentheorie (und spezieller einen Teil der Funktionentheorie, der spezielle Funktionen, die Modulformen, studiert).

- In der Natur erscheinen komplexe Zahlen in der Schrödingergleichung und in der Quantenfeldtheorie. Das ist nicht nur mathematisch praktisch und auch kein Taschenspielertrick, sondern inhärenter Bestandteil der Gleichungen, die unser physikalsches Universum beschreiben. Warum? Das weiß niemand!
- Komplexe Dynamik, z.B., die berühmte Mandelbrotmenge. Siehe Abbildung 2.

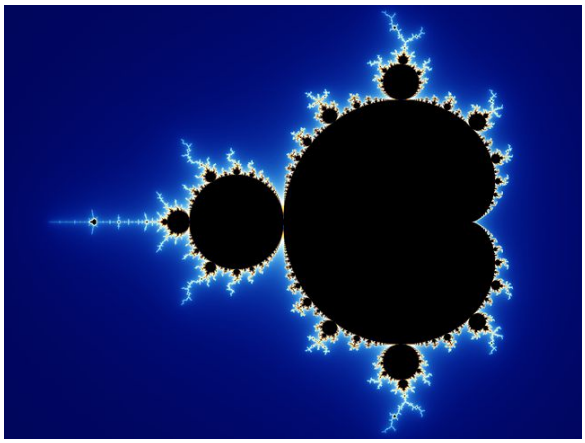


Abbildung 2: Die Mandelbrotmenge. [Quelle: Wikipedia]

Es gbt viele weitere Anwendungen und schöne Verbindungen der Funktionentheorie mit anderen Gebieten der Mathematik. (Falls Sie einige interessante kennen, lassen Sie mich das bitte wissen!)

Im nächsten Abschnitt werde ich unsere Reise in die Funktionentheorie damit beginnen, einige schöne Ideen zu illustrieren und langsam anfangen, einige Konzepte der Funktionentheorie für Einsteiger darzustellen.

2 Der Fundamentalsatz der Algebra

Einer der berühmtestten Sätze der Funktionentheorie ist der etwas unpassend bezeichnete Fundamentalsatz der Algebra. Er scheint eine passende Startrampe für unsere Theorie zu sein.

Satz 1 (Fundamentalsatz der Algebra.)**.** *Jedes nicht konstante Polynom $p(z)$ über den komplexen Zahlen hat eine Nullstelle*

Der Fundamentalsatz der Algebra ist eine subtile Aussage mit vielen schönen Beweisen. Ich werde Ihnen drei davon zeigen. Sagen Sie mir, wo Sie „Algebra“ sehen...

Beweis. [Erster Beweis: analytischer Beweis.] Es sei

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

ein Polynom mit Grad $n \geq 1$. Wir untersuchen, wo $|p(z)|$ sein Infimum annimmt.

Zunächst kann es nicht bei $|z| \to \infty$ sein, denn

$$|p(z)| = |z|^n \cdot (|a_n + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \ldots + a_0 z^{-n}|),$$

und insbesondere ist $\lim_{|z|\to\infty} \frac{|p(z)|}{|z|^n} = |a_n|$, also ist für große $|z|$ garantiert, dass $|p(z)| \geq |p(0)| = |a_0|$. Fixiert man einen Radius $R > 0$ für den $|z| > R$ impliziert, dass $|p(z)| \geq |a_0|$, dann haben wir deshalb

$$m_0 := \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)| = \inf_{|z|\leq R} |p(z)| = \min_{|z|\leq R} |p(z)| = |p(z_0)|$$

wobei $z_0 = \arg\min_{|z|\leq R} |p(z)|$, und das Minimum existiert, da $p(z)$ eine stetige Funktion auf der Kreisscheibe $D_R(0)$ ist.

Sei nun $w_0 = p(z_0)$, so dass $m_0 = |w_0|$. Wir behaupten nun, dass $m_0 = 0$. Für einen Widerspruch nehmen wir das Gegenteil an und überprüfen das lokale Verhalten von $p(z)$ um z_0;präziser können wir, indem wir $p(z)$ in Potenzen von $z - z_0$ umentwickeln, schreiben

$$p(z) = w_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j (z - z_0)^j = w_0 + c_k(z - z_0)^k + \ldots + c_n(z - z_0)^n.$$

Dabei ist k der minimale positive Index für den $c_j \neq 0$. (Übung: warum können wir $p(z)$ so entwickeln?) Nun stellen wir uns vor, dass wir mit $z = z_0$ starten und von z_0 in eine Richtung $e^{i\theta}$ gehen. Was passiert mit $p(z)$? Nun, die Entwicklung ergibt

$$p(z_0 + re^{i\theta}) = w_0 + c_k r^k e^{ik\theta} + c_{k+1} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} + \ldots + c_n r^n e^{in\theta}.$$

Wenn r sehr klein ist, dann dominiert die Potenz r^k die anderen Terme r^j mit $k < j \leq n$, d.h.,

$$\begin{aligned} p(z_0 + re^{i\theta}) &= w_0 + r^k (c_k e^{ik\theta} + c_{k+1} r e^{i(k+1)\theta} + \ldots + c_n r^{n-k} e^{in\theta}) \\ &= w_0 + c_k r^k e^{ik\theta}(1 + g(r, \theta)), \end{aligned}$$

wobei $\lim_{r\to 0} |g(r, \theta)| = 0$. Um einen Widerspruch zu erreichen, genügt es nun θ so zu wählen, dass der Vektor $c_k r^k e^{ik\theta}$ „in die entgegen gesetzte Richtung“ von w_0 zeigt, d.h. so, dass

$$\frac{c_k r^k e^{ik\theta}}{w_0} \in (-\infty, 0).$$

Das ist offensichtlich möglich: Nimm $\theta = \frac{1}{k}(\arg w_0 - \arg(c_k) + \pi)$. Es folgt, dass für hinreichend kleine r

$$|w_0 + c_k r^k e^{ik\theta}| < |w_0|$$

und für hinreichend kleine r ist dann (möglicherweise noch kleiner als das vorangehende kleine r))

$$|p(z_0 + re^{i\theta})| = |w_0 + c_k r^k e^{ik\theta}(1 + g(r, \theta))| < |w_0|,$$

- ein Widerspruch. Damit ist der Beweis vollständig. □

Übung 1. Vervollständigen Sie die letzten Details des Beweises (für welche r stimmen die Ungleichungen und warum?) Beachte, dass „komplexe Analysis (Funktionentheorie)“ Teil von „Analysis“ ist – solche Abschätzungen müssen Ihnen in Fleisch und Blut übergehen.

Beweis. [Zweiter Beweis: Topologischer Beweis.] Es sei $w_0 = p(0)$. Falls $w_0 = 0$, sind wir fertig. Andernfalls betrachten wir das p-Bild p des Kreises $|z| = r$. Speziell:

1. Für sehr kleines r ist das Bild enthalten in einer Umgebung von w_0, es kann also nicht „um den Ursprung gehen“.

2. Für sehr große r haben wir

$$\begin{aligned} p(re^{i\theta}) &= a_n r^n e^{in\theta}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} r^{-1} e^{-i\theta} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} r^{-n} e^{-in\theta}\right) \\ &= a_n r^n e^{in\theta}(1 + h(r,\theta)) \end{aligned}$$

   wobei $\lim_{r\to\infty} h(r,\theta) = 0$ (gleichmäßig in θ). Wenn θ von 0 nach 2π läuft, ist das eine geschlossene Kurve, die um den Ursprung n-mal läuft (ungefähr auf einem kreisförmigen Weg, der sich immer mehr einem Kreis nähert, wenn $r \to \infty$ geht).

Wenn wir schrittweise r von 0 zu einer sehr großen Zahl wachsen lassen, um zu einer Kurve, die den Nullpunkt nicht umkreist, überzugehen zu einer Kurve, die den Nullpunkt n-mal umkreist, dann muss es einen Wert für r geben, für den die Kurve den Punkt 0 trifft. Das heißt, der Kreis $|z| = r$ enthält einen Punkt mit $p(z) = 0$ - das ist die Behauptung. □

Bemerkung 1. Die im topologischen Beweis präsentierten Argumente sind nicht ganz präzis. Das ist auf verschiedenen Wegen präzisierbar – einen davon werden wir später mit Hilfe des Satzes von Rouché und des Argumentprinzips sehen. Das weist schon daraufhin, dass subtile topologische Argumente in der Funktionentheorie wichtig sein werden.

Bemerkung 2. Der topologische Beweis sollte verglichen werden mit dem Standardbeweis aus der Analysis dafür, dass jedes ungerade Polynom über den reellen Zahlen eine reelle Nullstelle hat. Die Argumentation ist auch „topologisch“ – basierend auf dem Mittelwertsatz, aber viel trivialer.

Beweis. [Dritter Beweis: Standardbeweis der Lehrbücher (oder: „Hokuspokus-Beweis“] Erinnerung:

Satz 2. *Satz von Liouville.] Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Wir nutzen die Aussage des Satzes von Liouville: Falls $p(z)$ ein Polynom ohne Nullstelle ist, dann ist $1/p(z)$ eine ganze Funktion. Darüber hinaus ist sie beschränkt, da, wie vorhin erwähnt, $\lim_{|z|\to\infty} \frac{|p(z)|}{|z|^n} = |a_n|$, d.h. $\lim_{|z|\to\infty} 1/p(z) = 0$. Es folgt, dass $1/p(z)$ eine Konstante ist, welche dann 0 sein muss – ein Widerspruch. □

Fazit dieses Abschnitts: Wir sahen drei Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra. Sie sind alle schön – der „Hokuspokus“-Beweis hat es sicherlich in sich – deshalb wird er in Lehrbüchern der Funktionentheorie favorisiert. Persönlich allerdings gefällt mir der erste am besten, da er elementar ist und Cauchy's Satz oder Folgerungen daraus und topologische Konzepte nicht benutzt.

Darüber hinaus ist es eine „lokale Argumentation“, die das Wissen ausnutzt, wie ein Polynom lokal funktioniert. Im Gegensatz dazu können die beiden anderen Beweise als „global“ charakterisiert werden. Es ist ein allgemeines philosophisches Prinzip der Analysis (mit Analogien auf anderen Gebieten, wie z.B. in der Zahlentheorie und Graphentheorie), dass lokale Argumente einfacher sind als globale.

3 Analytische Funktionen, konforme Abbildungen, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt definieren wir den wichtigsten Baustein der Theorie, nämlich den Begriff „analytisch“, und wir zeigen die nützlichsten Überlegungen zu diesem fundamentalen Konzept.

3.1 Definition und Grundeigenschaften von „analytisch“

Definition 1 („analytisch“)**.** Eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen ist **holomorph** (auch bezeichnet als **komplex-differenzierbar** oder **analytisch**[1] in z, falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir $f'(z)$ die **Ableitung von f in z.**

Falls $f'(z) \neq 0$, dann hat die Ableitung eine geometrische Bedeutung: Schreiben wir die Ableitung in Polarformzerlegung $f'(z) = re^{i\theta}$, dann haben wir für Punkte w, die nahe bei z liegen, die ungefähre Gleichung

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} \approx f'(z) = re^{i\theta},$$

oder dazu äquivalent

$$f(w) \approx f(z) + re^{i\theta}(w-z) + [\text{Terme niedrigerer Ordnung}],$$

wobei „Terme niedrigerer Ordnung“ sich auf eine Größe bezieht, deren Größenordnung viel kleiner ist als $|w-z|$. Geometrisch bedeutet das: Um $f(w)$ zu berechnen, beginnen wir mit $f(z)$ und gehen zu einem Vektor, der aus dem Displacement-Vektor $w-z$ besteht und um den Wnkel θ rotiert wird. Das skalieren wir dann um den Faktor r (Was einer Vergrößerung entspricht, sofern $r > 1$ ist, einer Verkleinerung, falls $0 < r < 1$, der gar nichts macht, wenn $r = 1$). Diese Idee kann man zusammenfassen unter dem Slogan:

> *„Analytische Funktionen verhalten sich lokal wie eine Rotation mit nachfolgender Skalierung.“*

Das lokale Verhalten analytischer Funktionen im Falle $f'(z) = 0$ ist subtiler; wir werden das später untersuchen.

Eine weitere Interpreation des Begriffs „analytisch“ ist, dass analytische Funktionen **konforme Abbildungen (d.h. „die Form bewahrende“)** dort sind, wo ihre Ableitungen nicht verschwinden. Präziser gesagt: Sind γ_1, γ_2 zwei differenzierbare Kurven in der Ebene mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$, ist f differenzierbar in z und ist $f'(z) \neq 0$, dann können wir mit den Bezeichnungen $v_1 = \gamma_1'(0)$, $v_2 = \gamma_2'(0)$, $w_1 = (f\circ\gamma_1)'(0)$, $w_2 = (f\circ\gamma_2)'(0)$ die Skalarprodukte

[1] Notiz: Einige Leute benutzen „analytisch“ und „holomorph“ mit zwei a priori verschiedenen Definitionen, die dann als äquivalent bewiesen werden. Das finde ich ohne weiteren Nutzen verwirrend und deshalb bennutze ich diese zwei Bezeichnungen im Wechsel.

(die üblichen aus Vektorgeometrie) zwischen den komplexen Zahlenpaaren v_1, v_2 und w_1, w_2 schreiben als

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= \mathrm{Re}(v_1\overline{v_2}),\\ \langle w_1, w_2\rangle &= \langle (f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0)), (f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0))\rangle\\ &= f'(z)\overline{f'(z)}\langle v_1, v_2\rangle = |f'(z)|^2\langle v_1, v_2\rangle.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit θ (resp. φ) den Winkel zwischen v_1, v_2 (resp. w_1, w_2), dann folgt, dass

$$\cos\varphi = \frac{\langle w_1, w_2\rangle}{|w_1||w_2|} = \frac{|f'(z)|^2\langle v_1, v_2\rangle}{|f'(z)v_1||f'(z)v_2|} = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{|v_1||v_2|} = \cos\theta.$$

Das heißt: Die Funktion f bildet zwei Kurven, die sich in z mit dem Winkel θ schneiden, ab auf zwei Kurven, die sich in $f(z)$ mit dem gleichen Winkel schneiden.

Ist umgekehrt f konform in einer Umgebung von z, dann ist (mit leichten zusätzlichen Annahmen) f analytisch – wir werden das bald im Rahmen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen beweisen. So enthält also die Theorie der analytischen Funktionen die Theorie ebener konformer Abbildungen als Spezialfall (und zwar als größtenteil äquivalenten). Auch das ist keinesfalls sofort klar bei der rein geometrischen Definition der Konformität.

Hier wollen wir kurz einige Eigenschaften von Ableitungen erwähnen.

Lemma 1. *Unter passenden Voraussetzungen gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z),\\ (fg)(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z),\\ \left(\frac{1}{f}\right)' &= -\frac{f'(z)}{f(z)^2},\\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2},\\ (f\circ g)'(z) &= f'(g(z))g'(z).\end{aligned}$$

Übung 2. Erklären Sie präzise die Annahmen im Lemma (Siehe Proposition 2.2 auf Seite 10 des Lehrbuchs [11]).

3.2 Cauchy-Riemannsche Gleichungen

Zusätzlich zu den geometrischen Vorstellungen über die komplexe Ableitung gibt es noch eine ganz andere, auch extrem wichtige, Vorstellung darüber, was „analytisch“ denn ist. Sie baut eine Brücke zwischen der Funktionentheorie und der gewöhnlichen Analysis mehrerer Variablen. Wir erinnern uns, dass komplexe Zahlen Vektoren mit Real- und Imaginärteil sind, die wir bezewichnen können als $z = x+iy$, wobei x,y reelle Zahlen sind. In ähnlicher Weise bezeichnetn man $f = u+iv$, wobei u, v reellwertige Funktionen von z sind (oder dazu äquivalent); von x und y) Remembering that complex numbers are vectors that have real and imaginary components, we can denote $z = x+iy$, where x and y will denote the real and imaginary parts of the complex number z, and $f = u+iv$, where u and v are real-valued functions of z (or equivalently

of x and y), welche den Realteil bzw. Imaginärteil von f darstellen. Ist nun f analytisch in z, dann ist

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{u(x+h+iy)-u(x+iy)}{h} + i\frac{v(x+h+iy)-v(x+iy)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0,\ h\in i\mathbb{R}} \frac{u(x+h+iy)-u(x+iy)}{h} + i\frac{v(x+h+iy)-v(x+iy)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{u(x+iy+ih)-u(x+iy)}{ih} + i\frac{v(x+iy+ih)-v(x+iy)}{ih} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y} - i\cdot i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Da diese Grenzwerte gleich sind, erhalten wir durch Vergleich ihrer Real- und Imaginärteile ein berühmtes System gekoppelter partieller Differentialgleichungen, die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wir haben bewiesen: Falls f analytisch ist in $z = x+iy$, dann erfüllen die Komponenten u, v von f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Umgekehrt behaupten wir nun: Ist $f = u+iv$ stetig differenzierbar in $z = x+iy$ (in dem Sinne, dass sowohl u als auch v stetig differenzierbare Funktionen von x, y sind – wie es in der reellen Analysis definiert wird) und erfüllt f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dann ist f analytisch in z.

Beweis. Die Annahme impliziert, dass f an z ein Differenzial hat, d.h. mit den Bezeichnungen des Vektorkalküls und mit den Bezeichnungen $f = (u,v)$, $z = (x,y)^\top$, $\Delta z = (h_1,h_2)^\top$ haben wir

$$f(z+\Delta z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + E(h_1,h_2),$$

wobei $E(h_1,h_2) = o(|\Delta z|)$ für $|\Delta z| \to 0$. Unter der Annahme, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, folgt nun, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 \\ -\frac{\partial u}{\partial y}h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}h_2 \end{pmatrix},$$

und das ist die Bezeichnung der Vektoranalysis für die komplexe Zahl

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1+ih_2) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta z.$$

Wir haben also gezeigt (jetzt wieder mit den Bezeichnern der Funktionentheorie), dass

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{E(\Delta z)}{\Delta z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Das beweist, dass f holomorph ist in z und seine Ableitung ist $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. □

Mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen können wir nun unsere vorangehende Behauptung beweisen, dass Konformalität die Eigenschaft „analytisch“ impliziert.

Satz 3. *Falls $f = u + iv$ in z konform und stetig differenzierbar im Sinne der reellen Analysis ist und die Ungleichung $\det J_f > 0$ erfüllt (d.h., f erhält als planare Abbildung die Orientierung), dann ist f holomorph in z.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Beweises haben wir wie vorangehend

$$f(z+\Delta z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + E(h_1, h_2),$$

wobei $E(h_1, h_2) = o(|\Delta z|)$ für $|\Delta z| \to 0$. Die Vermutung ist, dass die Differenzial-Abbildung

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

die Orientierung erhält und konform ist; die Folgerung ist, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind (Woraus nach dem obigen Ergebnis folgen würde, dass f in z holomorph ist). Der Satz ist also bewiesen, wenn wir die einfache Behauptung über 2×2-Matrizen des folgenden Lemmas 2 beweisen. □

Lemma 2 (Konformitäts-Lemma.)**.** *Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is a 2×2 eine reelle Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) A erhält die Orientierung (d.h. $\det A > 0$) und A ist konform, d.h.

$$\frac{\langle Aw_1, Aw_2 \rangle}{|Aw_1||Aw_2|} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|}$$

für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$.

(b) A hat die Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 > 0$.

(c) A hat die Gestalt $A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ für gewisse $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$. (Geometrisch gesehen heißt das, dass A eine Rotation mit anschließender Skalierung bewirkt.)

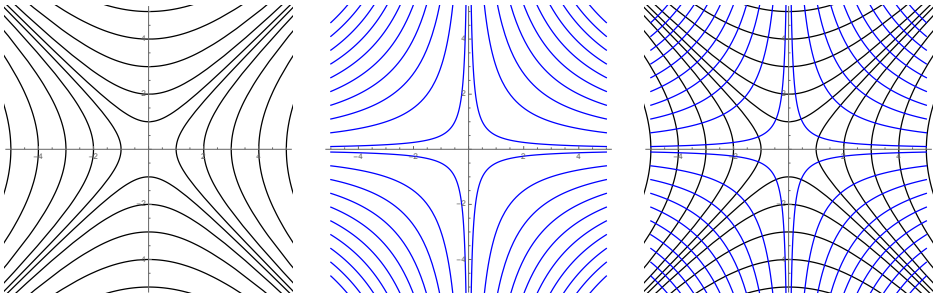
Beweis. [Beweis, dass (a) $\Longrightarrow$ (b).] Beachte, dass beide Spalten von A Vektoren ungleich Null sind aufgrund der Annahme, dass $\det A > 0$.Wir wenden nun die Konformitätsannahme an mit $w_1 = (1,0)^\top$, $w_2 = (0,1)^\top$ und erhalten, dass $(a,c) \perp (b,d)$, so dass $(b,d) = \kappa(-c,a)$ für ein $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wenden wir andererseits die Konformitätsananhme an auf $w_1 = (1,1)^\top$ und $w_2 = (1,-1)^\top$ dann erhalten wir $(a+b, c+d) \perp (a-b, c-d)$, und man sieht leicht, dass diese äquivalent ist mit $a^2+c^2 = b^2+d^2$. Zusammen mit der früheren Relation impliziert das, $\kappa = \pm 1$. Also hat A eine der beiden Gestalten $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$. Schließlich bedeutet die Annahme $\det A > 0$, dass die erste dieser Möglichkeiten vorliegt. □

Übung 3. Vervollständigen Sie den Beweis des vorangehenden Lemmas, indem Sie folgende Implikationen beweisen: (b) $\Longleftrightarrow$ (c) und (b) $\Longrightarrow$ (a).

Eine weitere kuriose Folge der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, welche eine alternative geometrische Darstellung zur Konformität darstellt, ist, dass aus der Eigenschaft „analytisch“ folgt, dass die Niveaulinien u und v orthogonal sind. Das heißt: Ist $f = u + iv$ analytisch, dann ist

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = (u_x, u_y) \perp (v_x, v_y) = u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x - v_x v_y = 0.$$

Da ∇u (bzw. ∇v) orthogonal ist zur Niveaulinie $\{u = c\}$ (bzw. zur Niveaulinie $\{v = d\}$), zeigt dies, dass sich $\{u = c\}$, $\{v = d\}$ rechtwinklig schneiden an jedem Schnittpunkt.

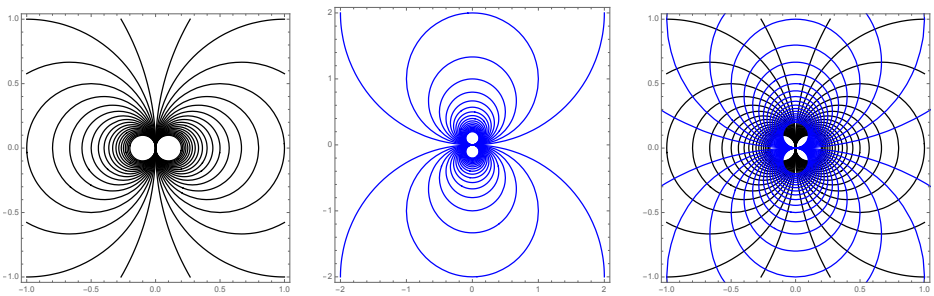


(a) (b) (c)

Abbildung 3: Die Niveaulinien für (a) Realteil und (b) Imaginärteil für $z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$. (c) zeigt die Überlagerung beider Familien der Niveaulinien.

Eine weitere und bemerkenswerte Folge der Cauchy-Riemannsache ist, dass zumindest bei leichten zusätzlichen Annahmen (die später entfallen) die Funktionen u, v **harmonische** Funktionen sind. Es sei f analytisch in z und dort *zweimal* stetig differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \end{aligned}$$



(a) (b) (c)

Abbildung 4: Die Niveaulinien für die Realteile und Imaginärteile von $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

d.h., u u erfüllt die Laplacegleichung

$$\triangle u = 0,$$

wobei $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der 2-dimensionale Laplace-Operator ist. In ähnlicher Weise (Überprüfen?) erfüllt auch v die Gleichung

$$\triangle v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass u und v harmonische Funktionen sind. Das ist ein extrem wichtiger Zusammenhang zwischen der Funktionentheorie und der Theorie partieller Differentialgleichungen, der auch Auswirkungen in viele andere Gebeite der reellen Analysis hat.

Später werden wir sehen, dass die Forderung nach zweimaliger stetiger Differenzierbarkeit fallen gelassen werden kann – wir brauchen dazu aber noch einige Ideen aus der Funktionentheorie.

Eine letzte Anmerkung zu analytischen Funktionen und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist die Beobachtung, dass, falls $f = u + iv$ analytisch ist, dann ist ihre Jacobi-Matrix (die wir im Sinne der Analysis mehrerer Variablen als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ interpretieren), gegeben durch

$$J_f = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |u_x + i v_x| = |f'(z)|^2.$$

Auch das kann man geometrisch interpretieren. (Übung: Wie?)

4 Potenzreihen

Bislang haben wir keine spezifischen Beispiele von Funktionen einer komplexen Variablen diskutiert. Natürlich gibt es die Standardfunktionen, dene Sie wahrscheinlich schon bei Studienanfang begegnet sind: Polynome, rationale Funktionen, e^z, die trigonometrischen Funktionen und so weiter. Aber neben diesen Beispielen wäre es nützlich, einen allgemein nutzbaren Weg zur Konstruktion einer großen Familie von Funktionen zu haben. Natürlich gibt es einen solchen Weg: die **Potenzreihen**, welche sich – nicht offensichtlich –als derart allgemeine Familie von Funktionen entpuppen, wie man es sich nur wünschen kann.

Präziser: Eine Potenzreihe ist eine Funktion einer komplexen Variablen z, welche definiert wird als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen ist. Allgemeiner kann man Potenzreihen definieren als

$$g(z) = f(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ wieder eine Folge komplexer Zahlen ist und z_0 ist eine fixe komplexe Zahl. Diese Funktionen sind überall dort definiert, wo die entsprechende Reihe konvergiert.

Für welche Werte von z macht diese Formel Sinn? Es ist leicht zu sehen, dass die Reihe absolut konvergiert für diejenigen z mit $0 \leq |z| < R$, wobei

$$R = \left(\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}.$$

R wird als Konvergenzradius der Potenzreihe bezeichnet.

Beweis. Es sei $0 < R < \infty$ (die Randfälle $R = 0$ und $R = \infty$ empfehlen wir als Übung). Die Definitionseigenschaft von R ist, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass $|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n$ für hinreichend große n und dass R die kleinste Zahl R mit dieser Eigenschaft ist. Nun sei $z \in D_R(0)$. Da $|z| < R$, haben wir $|z|\left(\frac{1}{R} + \epsilon\right) < 1$ für ein fixes $\epsilon > 0$, das wir hinreichend klein wählen. Daraus folgt für $n > N$ (für ein hinreichend großes N, das abhängig von ϵ ist),

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| < \sum_{n=N}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)|z|\right]^n .$$

Die Reihe wird also majorisiert durch eine konvergente geometrische Reihe und konvergiert deshalb.

Ist umgekehrt $|z| > R$, dann gilt $|z|\left(\frac{1}{R} - \epsilon\right) > 1$ für ein fixes, hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Wir wählen daraus eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ für die $|a_{n_k}| > \left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)^{n_k}$ (das geht aufgrund der Definition von R) und sehen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[|z|\left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)\right]^{n_k} = \infty .$$

Die Potenzreihe divergiert also. □

Übung 4. Ergänzen Sie den Beweis für die Randfälle $R = 0, \infty$.

Ein weiterer wichtiger Satz ist:

Satz 4. *Potenzreihen sind im Inneren der Kreisscheibe mit Konvergenzradius holomorphe Funktionen und dürfen termweise differenziert werden.*

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S_N(z) + E_N(z), \\ S_N(z) &= \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \\ E_N(z) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n, \\ g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist, dass f in der Konvergenzkreisscheibe differenzierbar ist und dass die Ableitung gleich der Potenzreihe p g ist. Da $n^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$, sieht man leicht, dass $f(z)$ und $g(z)$ denselben Konvergenzradius haben. Fixiere z_0 mit $|z| < r < R$. Wir wollen zeigen, dass $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ gegen $g(z_0)$ konvergiert für $h \to 0$. Dazu beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = &\left(\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0)\right) \\ &+ \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} + (S_N'(z_0) - g(z_0)). \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert gegen 0 für $h \to 0$ und für jedes fixe N. Um den zweiten Term zu beschränken, fixieren wir ein $\epsilon > 0$ und bedenken, dass, wenn wir annehmen, dass nicht nur $|z_0| < r$ sondern auch $|z_0 + h| < r$ (eine Annahme, welche leicht erfüllbar ist für h hinreichend nahe bei 0) dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h}\right| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{h\sum_{k=0}^{n-1} h^k (z_0+h)^{n-1-k}}{h}\right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1},\end{aligned}$$

wobei wir die algebraische Identität

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

benutzt haben. Der letzte Ausdruck in dieser Kette von Ungleichungen ist das Ende einer absolut konvergenten Reihe, kann also $< \epsilon$ gemacht werden, indem man N hinreichend groß nimmt (bevor man den Grenzwert für $h \to 0$ bildet).

Dann berücksichtigen wir bei der Wahl von N, dieses N auch so zu wählen, dass $|S_N'(z_0) - g(z_0)| < \epsilon$. Das geht natürlich, da $S_N'(z_0) \to g(z_0)$ für $N \to \infty$. Haben wir schließlich N so passend gewählt, dann erhalten wir

$$\limsup_{h\to 0} \left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0)\right| \leq 0 + \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Da ϵ eine beliebige positive Zahl war, zeigt dies, dass $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \to g(z_0)$ für $h \to 0$ – wie behauptet. □

Dieser Beweis kann gesehen werden als Spezialfall der folgenden eher konzeptuellen Erkenntnis: Ist g_n eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet Ω, und geht $g_n \to g$ *gleichmäßig auf geschlossenen Kreisscheiben* in Ω, und geht $g_n' \to h$ gleichmäßig auf geschlossenen Kreisscheiben in Ω, und ist h stetig, dann ist g holomorph und $g' = h$ auf Ω. (Übung: Beweisen Sie das und erklären Sie den Zusammenhang mit der vorangehenden Aussage)

Korollar 1. *Als Potenzreihen definierte analytische Funktionen sind unendlich oft (komplex) differenzierbar in der Konvergenzkreisscheibe.*

Korollar 2. *Für jede Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius gilt*

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Mit anderen Worten: $g(z)$ erfüllt die Taylorformel

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

5 Kurvenintegrale

Wir führen nun **Kurvenintegrale** ein. Sie sind ein anderer fundamentaler Baustein der Theorie. Kurvenintegrale haben wie viele andere Integrale als input eine zu integrierende Funktion und „ein Ding“ (oder „einen Platz“) über den die Funktion integriert wird. Im Fall der Kurvenintegrale ist „das Ding“ eine **Randkurve**, das ist (jedenfalls für unseren jetzigen Zwecke) eine Art ebene Kurve. Wir führen zum Anfang etwas Terminologie ein. Da ist zunächst die **parametrisierte Kurve**, welche einfach eine stetige Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist. Der Wert $\gamma(a)$ wird als Startpunkt der Kurve bezeichnet und $\gamma(b)$ heißt Endpunkt. Zwei Kurven $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ heißen **äquivalent**, was bezeichnet als $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $\gamma_2(t) = \gamma_1(I(t))$, wobei $I : [c,d] \to [a,b]$ eine stetige, bijektive und wachsende Funktion ist. Eine „Kurve“ ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Kurven bezüglich dieser Äquivalenzrelation.

In der Praxis werden wir üblicherweise einfach parametrisierte Kurven als „Kurven“ bezeichnen, *also einen Repräsentanten der Äquivalenzlklasse als die Äquivalenzklasse* - das ist ein in der Mathematik weithin übliche Missbrauch von Terminologie. Verschiedene Definitionen, Notationen und Beweisargumente müssen „die Äquivalenz in dem Sinne respektieren“, dass sie von der Wahl der Repräsentanten unabhängig sind. (Meta-Übung: Denken Sie an 2–3 weitere Beispiele für dieses Phänomen.)

In unserem Kontext „Funktionentheorie“ werden wir annehmen, dass alle unsere Kurven stückweise stetig differenzierbar sind. Allgemeiner kann man annehmen, dass sie rektifizierbar sind – aber dieser Theorie werden wir nicht nachgehen. Es gibt aber mehrere allgemeine Gebiete, in denen es nützlich ist, nur anzunehmen, dass Kurven stetig sind (und tatsächlich können einige der Ideen, die wir in komplex-analytischem Kontext entwickeln werden, in diesen allgemeineren Zusammenhang gebracht werden). Wir allerdings werden solchen Seitenwegen nicht nachgehen.

Sie begegneten wahrscheinlich Kurven und parametrisierten Kurven in ihren früheren Studien von Funktionen mehrerer Variabler, wo sie benutzt wurden zur Definition der **Linienintegrale** von Vektor- und Skalarenfeldern. Erinnern Sie sich, dass es zwei Typen von Linienintegralen gibt, welche als Linienintegrale erster Art und zweiter Art bezeichnet werden. Das Linienintegral erster Art einer Skalarfunktion (üblicherweise reell-wertig) über einer Kurve γ ist definiert als

$$\int_\gamma u(z)ds = \lim_{\max_j \Delta s_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} u(z_j)\Delta s_j \qquad \text{(Linienintegral erster Art)},$$

wobei der Grenzwert der Grenzwert einer Riemannschen Summe bezüglich einer Familie von Partitionen des Intervalls $[a,b]$ über der die Kurve γ definiert ist, für den Fall, dass die Norm der Partitionen gegen Null geht. Hier sind die Partitionspunkte gleich $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, die Punkte $z_j = f(t_j)$ sind ihre Bilder auf der Kurve γ, und die Symbole Δs_j beziehen sich auf die Linienelemente , nämlich auf $\Delta s_j = |z_j - z_{j-1}|$.

Das Linienintegral der zweiten Art wird definiert für ein Vektorfeld $\mathbf{F} = (P,Q)$ (die traditionellere Bezeichnung in der Analysis für das, was wir in unserem Kontext bezeichnen würden als die komplex-wertige Funktion $F = P + iQ$) mit

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \lim_{\max_j \Delta s_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} P(z_j)\Delta x_j + Q(z_j)\Delta y_j,$$

wobei z_j wie zuvor und $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$, $y_j = \mathrm{Im}(z_j)$.

Aus der Analysis ist wohlbekannt, dass Linienintegrale durch gewöhnliche Riemannintegrale (einer Variablen) darstellbar sind. Nehmen Sie sich etwas Zeit und begründen Sie, warum die folgenden Formeln wahr sind (unter der Annahme, dass alle beteiligten Funktionen stückweise stetig differenzierbar sind):

$$\int_\gamma u(z)\,ds = \int_a^b u(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt,$$
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(\mathbf{t}))\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

Weiter sollten Sie sich erinnern, dass der **Fundamentalsatz der Analysis für Linienintegrale** besagt, dass, falls $F = \nabla u$, dann ist

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)).$$

Definition 2 (Kurvenintegrale und Bogenlänge-Intervalle)**.** Für eine Funktion $f = u + iv$ einer komplexen Variablen z und eine Kurve γ definieren wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \text{“}\int_\gamma (u+iv)(dx+i\,dy)\text{”}\\
&= \left(\int_\gamma u\,dx - v\,dy\right) + i\left(\int_\gamma v\,dx + u\,dy\right)\\
&= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \qquad \text{(Kurvenintegral)},\\
\int_\gamma f(z)|dz| &= \int_\gamma f(z)\,ds = \int_\gamma u\,ds + i\int_\gamma v\,ds \qquad \text{(Bogenlängen-Integral)}.
\end{aligned}$$

Ist γ eine *geschlossene* Kurve (die zwei Endpunkte sind identisch, d.h., es gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$), dann bezeichnen wir das Kurvenintegral als $\oint_\gamma f(z)\,dz$ und das Bogenlängen-Integral bezeichnen wir mit mit $\oint_\gamma f(z)|dz|$.

Ein Spezialfall des Bogenlängen-Integrals ist die Länge der Kurve, definiert als das Integral der konstanten Funktion 1:

$$\mathrm{len}(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Wie schon erwähnt, handeln wir uns mit dem milden Missbrauch der Terminologie die Aufgabe ein, zu verifizieren, dass diese Definition nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt. Tatsächlich gilt: Sind $\gamma_1 \sim \gamma_2$ Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse parametrisierter Kurven, d.h. ist $\gamma_2(t) = \gamma_1(I(t))$ für eine Funktion mit Wohlverhalten, dann sehen wir mit Hilfe eines Variablenwechsels in Integralen mit einer Variablen, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_c^d f(\gamma_1(I(t)))(\gamma_1\circ I)'(t)\,dt\\
&= \int_c^d f(\gamma_1(I(t)))\gamma_1'(I(t))I'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma_1(\tau))\gamma_1'(\tau)\,d\tau\\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Übung 5. Zeigen Sie, dass das Bogenlängen-Integral ebenfalls nicht von der Parametrisierung abhängt.

Proposition 1 (Eigenschaften von Kurvenintegralen)**.** *Kurvenintegrale haben die folgenden Eigenschaften:*

(a) Linearität als Operator auf Funktionen: $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz$.

(b) Linearität als Operator auf Kurven: : Wenn eine Kurve Γ *eine „Komposition" ist der zwei Kurven* γ_1 *and* γ_2 *(in einem Sinne, der graphisch leicht zu erfassen ist, aber unangenehm hinzuschreiben ist), dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Ähnlich gilt, wenn γ_2 *die „umgekehrte" Kurve von* γ_1 *ist,*

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

(c) Dreiecksungleichung:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int |f(z)||dz| \le \mathrm{len}(\gamma) \cdot \sup_{z\in\gamma} |f(z)|.$$

Übung 6. Beweisen Sie das (Teil der Übung ist, präzise zu definieren, was „unter Komposition von Kurven" und „Umkehrkurve" zu verstehen ist).

Für Kurvenintegrale gibt es eine eigene Version des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Satz 5 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung für Kurvenintegrale)**.** *Es sei* γ *eine Kurve, welche* w_1 *und* w_2 *verbindet in einem Gebiet* Ω*, in dem Funktion* F *holomorph ist. Dann gilt*

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(w_2) - F(w_1).$$

Äquivalent dazu besagt der Satz, dass zur Berechnung eines allgemeinen Kurvenintegrals $\int_\gamma f(z)\,dz$, das Finden einer **Stammfunktion** von f ausreicht, d.h. einer Funktion F, so dass $F'(z) = f(z)$ in ganz Ω. Falls wir eine solche Stammfunktion finden, dann ist das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ gegeben durch $F(w_2) - F(w_1)$.

Beweis. Für glatte Kurven ergibt eine einfache Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)\,dz &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = (F\circ\gamma)(t)|_{t=a}^{t=b} \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(w_2) - F(w_1).\end{aligned}$$

Für stückweise glatte Kurven ist das eine triviale Verallgemeinerung - den Beweis empfehlen wir als Übung. □

Viele unserer Diskussionen von Kurvenintegralen werden sich mit dem Verhalten von Integralen bei geschlossenen Kurven befassen und dem Zusammenspiel der Eigenschaften solcher Integrale mit Integralen über allgemeinen Kurven. Ein Beispiel für dieses Zusammenspiel ist die eben gewonnene Erkenntnis. Sie hat eine einfache - aber wichtige - Folge für Integrale über geschlossene Kurven:

Korollar 3. *Ist $f = F'$, wobei F holomorph ist in einem Gebiet Ω (in diesem Fall sagen wir, dass f* ***eine Stammfunktion hat****) und ist γ eine geschlossene Kurve in Ω, dann ist*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Dies hat eine wichtige Konsequenz:

Proposition 2. *Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf Ω mit*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve in Ω, dann hat f eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$. Für jedes $z \in \Omega$ gibt es einen Weg $\gamma(z_0, z)$, der z_0 mit z verbindet (da Ω zusammenhängend und offen ist, also wegzusammenhängend — das ist eine Standardübung in der Topologie, siehe die Übungen in Kapitel 1 von [11]). Wir definieren

$$F(z) = \int_{\gamma(z_0,z)} f(w)\,dw.$$

Nach Annahme ist dieses Integral nicht davon abhängig, auf welchem Weg $\gamma(z_0, z)$ den Punkt z_0 mit z verbindet. Also ist $F(z)$ wohldefiniert. Wir behaupten nun, dass F holomorph ist und dass seine Ableitung f ist. Um das zu sehen, beachten wir, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \\
&\quad = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma(z_0,z+h)} f(w)\,dw - \int_{\gamma(z_0,z)} f(w)\,dw\right) - f(z) \\
&\quad = \frac{1}{h}\int_{\gamma(z,z+h)} f(w)\,dw - f(z) = \frac{1}{h}\int_{\gamma(z,z+h)} (f(w)-f(z))\,dw
\end{aligned}$$

wobei $\gamma(z, z+h)$ eine Kurve bezeichnet, die z und $z+h$ verbindet. Für hinreichend kleine $|h|$ ist dann die Kreisscheibe $D(z,h)$ in Ω enthalten und man kann dann $\gamma(z, z+h)$ als das gerade Liniensegment betrachten, das z und $z+h$ verbindet. Für solche h erhalten wir dann wegen der Setigkeit von f

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &\le \frac{1}{h}\operatorname{len}(\gamma(z,z+h)) \sup_{w\in D(z,h)} |f(w)-f(z)| \\
&= \sup_{w\in D(z,h)} |f(w)-f(z)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3. Beachte, dass wir mit der letzten Proposition und falls wir schon wüssten, dass holomorphe Funktionen unendlich oft differenzierbar sind (der sogenannte Regularitätssatz) folgern könnten, dass jede Funktion, welche die Eigenschaft hat, dass alle ihre Kurvenintegrale über geschlossenen Kurven 0 sind, holomorph ist. Das ist tatsächlich so und wird als **Satz von Morera** bezeichnet. Diesen wichtigen Satz der Funktionentheorie werden wir aber erst beweisen können, wenn wir Cauchy's Integralsatz bewiesen haben.

Beispiel 2. Berechne $\oint_{|z|=1} z^n \, dz$ für $n \in \mathbb{Z}$. Was lernen wir daraus, dass das Integral für $n = -1$ nicht Null ist? (Hinweis: etwas; was denn?) Und was lernen wir daraus, dass das Integral für $n \neq -1$ Null ist? (Hinweis: nichts; aber warum?)

Lemma 3. *Es sei f holomorph auf Ω und $f' \equiv 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Fixiere ein $z_0 \in \Omega$. Wie wir vorangehend diskutierten gibt es für jedes $z \in \Omega$ einen Weg $\gamma(z_0, z)$, der z_0 mit z verbindet. Dann ist

$$f(z) - f(z_0) = \int_{\gamma(z_0,z)} f'(w) \, dw = 0,$$

also ist $f(z) \equiv f(z_0)$, also ist f konstant. □

6 Cauchyscher Integralsatz

Ein zentrales Ergebnis der Funktionentheorie ist der **Cauchysche Integralsatz**.

Satz 6 (Cauchyscher Integralsatz.)**.** *Es sei f holomorph im **einfach zusammenhängenden** Gebiet Ω, dann gilt für jede geschlossene Kurve in Ω*

$$\oint_\gamma f(z) \, dz = 0.$$

Wir stehen vor drei Herausforderungen: Erstens, den Cauchyschen Satz für Kurven und relativ einfache Gebiete zu beweisen (Fälle ohne topologische Implikationen). Zweitens müssen wir definieren, was „einfach zusammenhängend" sein soll. Drittens - was etwas länger sein wird und was wir nicht gleich machen - den Satz erweitern für sehr allgemeine Anwendungsfälle.

Zwei weitere Sätze, die mit dem Cauchyschen Integralsatz eng verbunden sind, sind der **Satz von Goursat**, ein relativ einfacher Spezialfall des Cauchyschen Integralsatzes, und der **Satz von Morera**, welcher in gewisser Weise eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes darstellt.

Satz 7 (Satz von Goursat)**.** *Es sei f holomorph im Gebiet Ω und T sei ein Dreieck, das in Ω enthalten ist. Dann ist $\oint_{\partial T} f(z) \, dz = 0$ (wobei T sich auf das „volle Dreieck" bezieht; ∂T bezieht sich auf seinen Rand, betrachet als Kurve, die im üblichen Sinne positiv orientiert ist).*

Satz 8 (Satz von Morera)**.** *Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet Ω mit*

$$\oint_\gamma f(z) \, dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve in Ω, dann ist f holomorph auf Ω.

Beweis. [Beweis des Satzes von Goursat.] Der Beweis lässt sich zusammenfassen mit dem Slogan „lokalisiere den Schaden“: Versuche nämlich, eine globale Aussage über das Integral eines Dreiecks umzusetzen in eine lokale Aussage über das Verhalten nahe einem Punktes innerhalb des Dreiecks. Das wäre dann leichter zu behandeln, da wir ein gutes Verständnis haben vom lokalen Verhalten einer holomorphen Funktion nahe eines Punktes. Wenn mit einem globalen Integral etwas schief läuft, dann muss auch auf lokaler Ebene etwas schiefgehen und wir werden zeigen, dass das nicht passieren kann (obwohl technisch der Beweis kein Widerspruchsbeweis ist, ist das aber konzeptuell ein Weg, darüber nachzudenken)

Die Idee ist präzisierbar mit Hilfe von *Dreieckszerlegung*. Speziell sei $T^{(0)} = T$. Dann definieren wir eine Hierarchie von unterteilten Dreiecken

$$\begin{aligned}
&\text{Dreieck der Ordnung } 0: && T^{(0)},\\
&\text{Dreiecke der Ordnung } 1: && T_j^{(1)}, 1 \le j \le 4,\\
&\text{Dreiecke der Ordnung: } 2 && T_{j,k}^{(2)}, 1 \le j,k \le 4\\
&\text{Dreiecke der Ordnung } 3: && T_{j,k,\ell}^{(3)}, 1 \le j,k,\ell \le 4,\\
&\qquad\vdots\\
&\text{Dreiecke der Ordnung } n: && T_{j_1,\dots,j_n}^{(n)}, 1 \le j_1,\dots,j_n \le 4.\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Hier erhält man die Dreiecke $T_{j_1,\dots,j_n}^{(n)}$ für $j_n = 1,2,3,4$ durch Unterteilen des $n-1$-ten Dreiecks $T_{j_1,\dots,j_{n-1}}^{(n-1)}$ in 4 Teildreiecke, deren Scheitel gleich den Scheiteln oder Halbabschnitten von $T_{j_1,\dots,j_{n-1}}^{(n-1)}$ sind (siehe Bild 1 auf Seite 35 von [11]).

Nachdem nun bekannt ist, wie die Unterteilung funktioniert, ist klar, dass folgende Gleichung gilt

$$\oint_{\partial T_{j_1,\dots,j_{n-1}}^{(n-1)}} f(z)\,dz = \sum_{j_n=1}^{4} \oint_{\partial T_{j_1,\dots,j_n}^{(n)}} f(z)\,dz$$

denn die internen Integrale über Teilstrecken löschen sich (weil gegenläufig) gegenseitig aus, und deshalb gilt

$$\oint_{\partial T^{(0)}} f(z)\,dz = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{4} \oint_{\partial T_{j_1,\dots,j_n}^{(n)}} f(z)\,dz.$$

Das heißt, dass das Integral entlang des Ursprungsdreiecks gleich ist der Summe der Integrale über alle 4^n Dreiecke der Ordnung n. Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass *eines dieser Dreiecke einen Betrag haben muss, der zumindest so groß ist wie der Durchschnitt*. Wir haben also

$$\left|\oint_{\partial T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \le \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{4} \left|\oint_{\partial T_{j_1,\dots,j_n}^{(n)}} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\oint_{\partial T_{\mathbf{j}(n)}^{(n)}} f(z)\,dz\right|$$

wobei $\mathbf{j}(n) = (j_1^{(n)},\dots,j_n^{(n)})$ ein n-Tupel ist, das so gewählt wird, dass die zweite Ungleichung gilt. Darüber hinaus können wir $\mathbf{j}(n)$ induktiv so wählen, dass die Dreiecke $T_{\mathbf{j}(n)}^{(n)}$ geschachtelt sind — d.h., dass $T_{\mathbf{j}(n)}^{(n)} \subset T_{\mathbf{j}(n-1)}^{(n-1)}$ für $n \ge 1$, oder dazu äquivalent, dass $\mathbf{j}(n) = (j_1^{(n-1)},\dots,j_{n-1}^{(n-1)},k)$ für

ein $1 \le k \le 4$ — um das zu erreichen, wählen wir k so, dass $\left|\oint_{\partial T^{(n)}_{(\mathbf{j}(n-1),k)}} f(z)\,dz\right|$ größer ist (oder gleich) als der Durchschnitt

$$\frac{1}{4}\sum_{d=1}^{4}\left|\oint_{\partial T^{(n)}_{(\mathbf{j}(n-1),d)}} f(z)\,dz\right|,$$

und dieser wiederum ist (induktive Folgerung) größer oder gleich

$$\left|\frac{1}{4}\sum_{d=1}^{4}\oint_{\partial T^{(n)}_{(\mathbf{j}(n-1),d)}} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\partial T^{(n-1)}_{\mathbf{j}(n-1)}} f(z)\,dz\right| \ge 4^{-(n-1)}\oint_{\partial T} f(z)\,dz.$$

Nun beobachten wir, dass die Folge geschachtelter Dreiecke gegen einen einzelnen Punkt konvergiert. Wir haben also

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)} = \{z_0\}$$

für einen Punkt $z_0 \in T$. Das stimmt, da die Durchmesser der Dreiecke gegen 0 gehen für $n \to \infty$ - deshalb können gewiss nicht zwei Punkte im Durchschnitt sein. Andererseits kann der Durchschnitt nicht leer sein, da die Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ der Mittelpunkte (in einem naheliegneden Sinn, z.B. die Durchschnitte der Seitenmittelpunkte) offenbar eine Cauchyfolge ist (also eine konvergente Folge aufgrund der Vollständigkeit der komplexen Zahlen), deren Grenzwert ein Element des Durchnitts sein muss.

Nun haben wir z_0 definiert und können $f(z)$ für z nahe z_0 schreiben als

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0),$$

wobei

$$\psi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0).$$

Die Holomorphie von f an z_0 impliziert, dass $\psi(z) \to 0$ für $z \to z_0$. Wir bezeichnen mit $d^{(n)}$ den Durchmesser von $T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}$ und mit $p^{(n)}$ seinen Umfang. Jede Unterteilung halbiert sowohl den Durchmesser als auch den Umfang und deshalb gilt

$$d^{(n)} = 2^{-n} d^{(0)}, \qquad p^{(n)} = 2^{-n} p^{(0)}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\partial T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)\,dz\right| \\ &= \left|\int_{\partial T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}} \psi(z)(z - z_0)\,dz\right| \le p^{(n)} d^{(n)} \sup_{z \in T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}} |\psi(z)|\end{aligned}$$

Nun kombinieren wir das mit der Beziehung zwischen $\left|\oint_{\partial T^{(0)}} f(z)\,dz\right|$ und $\left|\int_{\partial T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}} f(z)\,dz\right|$, dann erhalten wir

$$\left|\int_{\partial T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \le p^{(0)} d^{(0)} \sup_{z \in T^{(n)}_{\mathbf{j}(n)}} |\psi(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Im nächsten Abschnitt werden wir einige frappierende Konsequenzen aus diesem letztendlich einfachen Satz untersuchen. Zuerst aber wollen wir folgende naheliegenden Folgerungen ziehen:

Korollar 4 (Satz von Goursat für Rechtecke.)**.** *Satz 7 bleibt richtig, wenn wir das Wort „Dreieck" ersetzen durch „Rechteck".*

Beweis. Klar: Jedes Rechteck ist zerlegbar in eine Vereinigung zweier Dreiecke. Das Kurvenintegral über das Rechteck ist gleich der Summe der Integrale über die Dreiecke - die Integralanteile über die Diagonale sind gegenläufig und löschen sich aus. (siehe Proposition 1(b)). □

Korollar 5 (Existenz einer Stammfunktion für holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe)**.** *Es sei f auf einer Kreisscheibe D holomorph, dann ist $f = F'$ für eine auf D holomorphe Funktion F.*

Beweis. Die Idee ist sehr ähnlich zur Idee beim Beweis der vorangehenden Proposition 2 Würden wir wissen, dass alle Kurvenintegrale von f über geschlossenen Kurven verschwinden, dann hätten wir schon, was wir suchen. Nach Lage der Dinge wissen wir das aber nur für dreieckige Kurven. Wie können wir das nutzen? Das Lehrbuch [11] liefert eine schlaue Herangehensweise, in welcher die Kurve $\gamma(z_0, z)$ umfasst wird von einem horizontalen Geradenabschnitt, gefolgt von einem vertikalen Geradenabschnitt . Dann zeigt man in drei Schritten, jeder mit Nutzung des Satzes von Goursat, (siehe Bild 4 auf Seite 38 von [11]), dass $F(z_0+h)-F(z_0)$ genau das Kurvenintegral ist über den Geradenabschnitt, der z_0 mit $z_0 + h$ verbindet. Von da an geht der Beweis genauso weiter wie zuvor. □

Korollar 6 (Cauchyscher Integralsatz für Kreisscheiben)**.** *Es sei f holomorph auf einer Kreisscheibe, dann ist $\oint_\gamma f\,dz = 0$ für jede geschlossene Kurve γ in der Kreisscheibe.*

Beweis. f hat eine Stammfunktion, und wir haben schon gesehen, dass daraus die Behauptung folgt. □

Satz 9 (Cauchyscher Integralsatz für eine „Spielkurve")**.** *Die Aussage $\int_\gamma f(z)dz = 0$ gilt auch für jede Funktion, welche analytisch ist in einem Gebiet, das eingeschlossen wird durch eine „hinreichend einfache" Kurve, auf die das vorangehende Verfahren anwendbar ist.* [2]

Beweis. Man wiederholt dieselben Vorgehensweisen wie beim Beweis des Satzes von Goursat, erkennt, dass eine Stammfunktion existiert, und wendet schließlich an, dass Kurvenintegrale über geschlossenen Kurven verschwinden. Bei komplexeren „Spielzeugkurven" liegen die Schwierigkeiten darin, sicherzustellen, dass die geometrischen Argumente zur Existenz einer Stammfunktion funktionieren – siehe z.B. die (unvollständige) Diskussion der „Schlüsselloch-Kurven" auf den Seiten 40–41 des Lehrbuchs [11]. □

7 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Satz 10 (Cauchysche Integralformel)**.** *Es sei f holomorph im Gebiet Ω, und $C = \partial D$ sei eine kreisförmige Kurve in Ω, dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in D, \\ 0 & \text{falls } z \in \Omega \setminus \overline{D}, \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } z \in C. \end{cases}$$

[2] Das Buch [11] nennt eine solche Kurve eine **Spielzeugkurve** – wir lassen die Bezeichnung durchgehen als eine etwas vage Bezeichnung für ein Meta-Konzept.

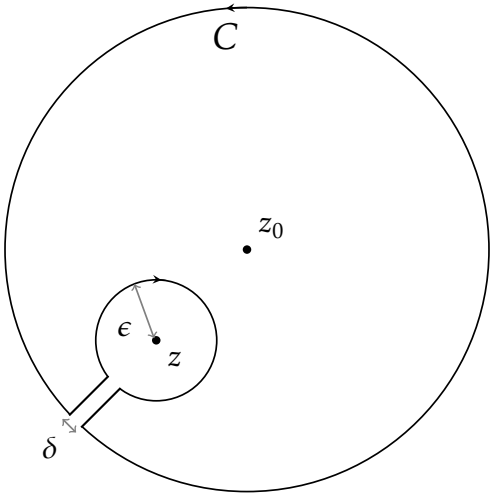


Abbildung 5: Die Schlüssellochkurve, die im Beweis der Cauchyschen Integralformel verwendet wird.

Beweis. Der Fall mit $z \notin \overline{D}$ wird abgedeckt durch den Cauchyschen Integralsatz auf einer Kreisscheibe, da in diesem Fall die Funktion $w \mapsto f(w)/(w-z)$ holomorph in einer offenen Menge ist, welche $\overline{D}$ enthält. Es bleibt der Fall mit $z \in D$. In diesem Fall bezeichne z_0 den Mittelpunkt des Kreises C. Die Idee ist nun, stattdessen das Integral

$$\oint_{\Gamma_{\epsilon,\delta}} F_z(w)\,dw = \oint_{\Gamma_{\epsilon,\delta}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

zu betrachten, in dem $\Gamma_{\epsilon,\delta}$ die sogenannte **Schlüssellochkurve** ist, nämlich eine Kurve mit einem großen Kreisbogen um z_0, die ein Teil des Kreises C ist, und einem weiteren kleineren Kreisbogen mit Radius ϵ mit Mittelpunkt z und mit zwei Geradensegmenten, welche die Kreisbögen so verbinden, dass eine geschlossene Kurve entsteht und zwar so, dass die Weite des „Nackens“ des Schlüssellochs gleich δ ist, (stellen Sie sich δ als viel kleiner vor als ϵ); siehe Bild 5. Beachte, dass die Funktion $F_z(w)$ holomorph ist im Gebiet, das von $\Gamma_{\epsilon,\delta}$ eingeschlossen wird. Also liefert Cauchys Integralsatz für Spielzeugkurven (wir nehmen an, dass es für Sie klar ist, dass eine Spielzeugkurve vorliegt), dass

$$\oint_{\Gamma_{\epsilon,\delta}} F_z(w)\,dw = 0.$$

Für $\delta \to 0$ löschen sich die zwei Integralteile des Integrals entlang dem „Nacken“ der Randkurve $\Gamma_{\epsilon,\delta}$ beim Grenzübergang aus, da F_z stetig ist, also gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $\overline{D} \setminus D(z,\epsilon)$. Also können wir folgern, dass

$$\oint_C F_z(w)\,dw = \oint_{|w-z|=\epsilon} F_z(w)\,dw.$$

Der nächste und letzte Schritt besteht im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ der rechten Seite dieser Gleichung . Zuerst zerlegt man $F_z(w)$ in

$$F_z(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} + f(z)\cdot\frac{1}{w-z}.$$

Dann integrieren wir die Teile separat. Für den ersten Teil haben wir

$$\left|\oint_C \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\right| \le 2\pi\epsilon \cdot \sup_{|w-z|=\epsilon} \frac{|f(w)-f(z)|}{\epsilon}$$
$$= 2\pi \sup_{|w-z|=\epsilon} |f(w)-f(z)| \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0,$$

wegen der Stetigkeit von f; und für den zweiten Term erhalten wir

$$\oint_{|w-z|=\epsilon} f(z)\cdot\frac{1}{w-z}\,dw = f(z)\oint_{|w-z|=\epsilon}\frac{1}{w-z}\,dw = 2\pi i f(z)$$

(nach einer Standardrechnung, siehe voriges Beispiel 2). Insgesamt ergibt das die zu beweisende Formel, nämlich

$$\oint_C \frac{1}{2\pi i} F_z(w)\,dw = f(z).$$

□

Beispiel 3. In dem Fall, dass z der *Mittelpunkt* des Kreises $C = \{w : |w-z| = r\}$ ist, ergibt Cauchys Formel, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{|w-z|=r} f(w)\,\frac{dw}{i(w-z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt.$$

Mit anderen Worten: Wir haben bewiesen, dass:

Satz 11 (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen)**.** *Der Wert einer holomorphen Funktion f in z ist gleich dem Mittelwert seiner Werte um den Kreis $|w-z| = r$ (wir nehmen an, dass f holomorph ist auf einer offenen Menge, welche die Kreisscheibe $|w-z| \le r$ enthält).*

Untersucht man, was die Mittelwerteigenschaft für Realteil und Imaginärteil von $f = u + iv$ bedeutet - u,v sind beides harmonische Funktionen - dann sieht man, dass sie eine ähnliche Mittelwerteigenschaft haben:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+r\cos t, y+r\sin t)\,dt.$$

Das trifft tatsächlich für alle harmonischen Funktionen zu — eine Tatsache, welche bekannt ist als **Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen**. Sie kann separat mit Hilfe von PDE-Methoden und reeller Analysis bewiesen werden, oder mit den vorangehenden Beobachtungen hergeleitet werden, indem man zeigt, dass jede harmonische Funktion auf einer Kreisscheibe der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

Satz 12 (Cauchysche Integralformel – erweiterte Version)**.** *Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 10 ist f unendlich oft differenzierbar und für $z \in D$ sind die Ableitungen $f^{(n)}(z)$ gegeben durch*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.$$

Die Tatsache, dass holomorphe Funktionen unendlich oft differenzierbar sind, wird in [11] bezeichnet als **Regularitätssatz**.

Beweis. Die entscheidende Beobachtung ist, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von Cauchys Integralformel für $f(z)$ (das ist der Fall $n = 0$ der „erweiterten“ Version) unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. Präziser heißt das: Sei $n \geq 1$, und es sei induktiv bewiesen, dass

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^n}\, dw.$$

Dann ist

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C f(w) \cdot \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(w-z-h)^n} - \frac{1}{(w-z)^n}\right) dw.$$

Man sieht leicht, dass für $h \to 0$, die dividierte Differenz $\frac{(w-z-h)^{-n}-(w-z)^{-n}}{h}$ gegen $n(w-z)^{-n-1}$ konvergiert, *und zwar gleichmäßig über* $w \in C$. (Dieselbe Behauptung ohne die Gleichmäßigkeit ist gerade die Differentiationsregel einer Potenz – um die Uniformität zu erhalten, muss man „zurück zu den Anfängen“ gehen und die elementare algebraische Rechnung wiederholen, die anfangs für die Herleitung der Potenzregel angewandt wurde – eine Illustration der Idee, dass in der Mathematik wichtig ist, nicht nur Aussagen zu verstehen, sondern auch die Techniken, die zu deren Beweis führen.) Es folgt, dass wir in der vorangehenden Integraldarstellung den Grenzübergang $h \to 0$ machen dürfen, und wir erhalten

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C f(w) n (w-z)^{-n-1}\, dz.$$

Das ist genau der n-te Fall der Cauchyschen Integralformel. □

Beweis. [Beweis des Satzes von Morera] Wir haben schon gezeigt, dass eine Funktion f, deren Integrale über geschlossene Kurven alle verschwinden, eine Stammfunktion F hat. Die Regularitätseigenschaft impliziert nun, dass die Ableitung $F' = f$ auch holomorph ist, also ist f holomorph - das war die Behauptung des Satzes von Morera. □

Eine weitere sofortige Folgerung aus Cauchys Integralformel ist eine sehr nützliche Familie von Ungleichungen, welche die Funktion $f(z)$ und ihre Ableitungen an einem spezifischen Punkt $z \in C$ beschränkt und zwar mit Hilfe der Werte der Funktion auf dem Rand des Kreises mit Mittelpunkt z.

Satz 13 (Cauchysche Ungleichungen)**.** *Es sei f holomorph in einem Gebiet Ω, welches eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_R(z)}$ enthält, dann gilt*

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! R^{-n} \sup_{z \in \partial D_R(z)} |f(z)|.$$

(Dabei ist $\partial D_R(z)$ ein Kreis mit Radius R um z).

Satz 14 (Holomorphe Funktionen sind analytisch)**.** *Es sei f holomorph in einem Gebiet Ω, das eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_R(z_0)}$ enthält, dann hat f eine Potenzreihenentwicklung in z_0:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Diese ist konvergent für alle $z \in D_R(z_0)$, wobei (natürlich) $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Beweis. Die Beweisidee ist, dass uns Cauchys Integralformel eine Darstellung von $f(z)$ als „gewichtete Summe“ (das ist ein Integral, das den Grenzwert einer Summe darstellt) von Funktionen der Form $z \mapsto (w-z)^{-1}$ liefert. Jede solche Funktion hat eine Potenzreihenentwicklung, da sie, mehr oder weniger, eine geometrische Reihe ist. Also hat auch die Summe eine Potenzreihenentwicklung.

Das schreiben wir jetzt präziser hin:

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(w-z_0)^{-n-1}(z-z_0)^n.\end{aligned}$$

Das ist eine Potenzreihe in $z-z_0$e, welche unter der Annahme, dass $w \in C_R(z_0)$, absolut konvergiert für alle z mit $|z-z_0| < R$ (d.h. für alle $z \in D_R(z_0)$). Darüber hinaus ist die Konverganz offensichtlich gleichmäßig in $w \in C_R(z_0)$. Die unendlche Summe, welche absolut und gleichmäßig konvergiert, darf mit der Integration vertauscht werden und wir erhalten dann - unter Nutzung der erweiterten Form der Cauchyschen Integralformel - , dass

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R(z_0)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}(w-z_0)^{-n-1}(z-z_0)^n\,dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R(z_0)} f(w)(w-z_0)^{n-1}\,dw\right)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.\end{aligned}$$

Das ist genau die Entwicklung, die wir suchten. □

Bemerkung 4. Selbst wenn wir im vorangehenden Beweis nur den einfachen Fall ($n = 0$) der Cauchyschen Integralformel kennen würden (und insbesondere wenn wir den Regularitätssatz, der aus der erweiterten Formel folgt, nicht kennen würden), könnten wir dennoch aus dem vorletzten Ausdruck in der obigen Gleichungskette folgern können, dass $f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung der Form $\sum_n a_n(z-z_0)^n$, mit $a_n = (2\pi i)^{-1}\int_{C_R(z_0)} f(w)(w-z)^{-n-1}$ hat. Aus früher bewiesenen Ergebnissen würde dann folgen, dass $f(z)$ unendlich oft differenzierbar ist und dass $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Das würde also wieder die erweiterte Form von Cauchys Integralformel liefern.

Satz 15 (Satz von Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Eine einfache Anwendung der Cauchyschen Ungleichungen (Fall $n = 1$) mit Grenzübergang $R \to \infty$ zeigt, dass $f'(z) = 0$ für alle z. Also muss - wie bereits gezeigt - f konstant sein. □

Satz 16. *Es sei f holomorph im Gebiet Ω und $f = 0$ für jedes z aus einer Menge mit Häufungspunkt in Ω, dann ist f auf Ω identisch 0.*

Beweis. Ist der Häufungspunkt gleich $z_0 \in \Omega$, d.h. es gibt eine Folge $(w_k)_{k=0}^{\infty}$ von Punkten in Ω mit $f(w_k) = 0$ für alle n, $w_k \to z$, und $w_k \neq z_0$ für alle k. Wir wissen, dass f in einer Umgebung von z_0, f eine konvergente Potenzreihenentwicklung hat. Nehmen wir an, dass f in einer Umgebung von z_0 ist, dann können wir diese Potenzreihenentwicklung schreiben als

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0} a_n (z-z_0)^k = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\infty} \\ &= a_m (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{a_m} (z-z_0)^n = a_m (z-z_0)^m (1+g(z)). \end{aligned}$$

Dabei ist m der kleinste Index mit $a_m \neq 0$ und $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{a_m}(z-z_0)^n$ ist eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von z_0 mit $g(z_0) = 0$. Daraus folgt, dass für alle k

$$a_m (w_k - z_0)^m (1 + g(w_k)) = f(w_k) = 0\,.$$

Das ist aber für große k nicht möglich, da $w_k - z_0 \neq 0$ für alle k und da $g(w_k) \to g(z_0) = 0$ für $k \to \infty$.

Daraus folgt, dass f identisch Null sein muss mindestens in einer Umgebung von z_0. Nun behaupten wir, dass daraus auch folgt, dass f identisch Null ist auf ganz Ω, da Ω ein Gebiet ist (offen und zusammenhängend). Präziser: Es bezeichne U die Menge der Punkte $z \in \Omega$, so dass f gleich 0 in einer Umgebung von z. Offensichtlich ist U offen, also auch relativ offen in Ω, da Ω selbst offen ist; U ist auch abgeschlossen - nach der vorangehenden Argumentation; weiter ist U nicht leer (es enthält z_0, wieder nach den vorangehenden Überlegungen). Es folgt, dass $U = \Omega$ nach der wohlbekannten Charakterisierung eines zusammenhängenden topologischen Raumes, der keine zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen enthält, außer die leere Menge und den ganzen Raum.

Alternativ kann man den Beweis wie folgt weiterführen:

Ein alternativer Beweisweg ist der folgende: Für jeden Punkt $z \in \Omega$ sei $r(z)$ der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um z. Dann bilden die Kreisscheiben $\{D_{r(z)}(z) : z \in \Omega\}$ eine Überdeckung von Ω. Nimm $w \in \Omega$ (mit z_0 wie vorangehend) und bilde einen Pfad $\gamma : [a,b] \to \Omega$, der z_0 und w verbindet (er existiert, da Ω offen und zusammenhängend ist, also wegzusammenhängend). Die offene Überdeckung Ω durch Kreisscheiben ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\gamma[a,b]$ (das Bild von γ). Nach der Heine-Borel-Eigenschaft kompakter Mengen gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{D_{r(z_j)}(z_j) : j = 0,\dots,m\}$ (wobei wir $w = z_{m+1}$ nehmen. Der vorangehende Beweis zeigt, dass f identisch Null ist auf $D_{r(z_0)}(z_0)$. Falls wir also wissen, dass f gleich Null ist auf $D_{r(z_j)}(z_j)$, dann können wir folgern, dass f Null ist auf der nächsten Kreisscheibe $D_{r(z_{j+1})}(z_{j+1})$. So können wir bis zur letzten Kreisscheibe gehen und finden, dass f gleich Null ist auf $D_{r(w)}(w)$. Insbesondere ist $f(w) = 0$ - wie behauptet. □

Bemerkung 5. Das vorangehende Ergebnis wird manchmal beschrieben durch die Aussage **Nullstellen holomorpher Funktionen sind isoliert**, da sie wie folgt formuliert werden kann: Ist f holomorph auf Ω, nicht identisch Null auf Ω, und ist $f(z_0) = 0$ für $z_0 \in \Omega$, dann hat für ein $\epsilon > 0$ die punktierte Umgebung $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ von z_0 keine weiteren Nullstellen von f. Mit anderen Worten: Die Nullstellenmenge von f enthält nur isolierte Punkte.

Bemerkung 6. Die Bedingung, dass der Häufungspunkt $z_0 \in \Omega$, wird gebraucht! Beachte, dass es möglich *ist*, dass Ω eine Punktfolge $z_n \to z_0$ mit Punkten in Ω hat, so dass $f(z_n) = 0$ für alle n. Betrachte z.B. die Funktion $e^{1/z} - 1$ — sie hat Nullstellen in jeder Umgebung von $z_0 = 0$.

Korollar 7. *Es seien f, g holomorph in einem Gebiet Ω und $f(z) = g(z)$ für z in einer Menge mit Häufungspunkt in Ω (z.B. in einer offenen Kreisscheibe, oder sogar eine Punktfolge z_n, die gegen ein $z \in \Omega$)konvergiert, dann ist $f \equiv g$ überall in Ω.*

Beweis. Wende das vorangehende Ergebnis an auf $f - g$. □

Dieses Ergebnis wird üblicherweise leicht anders formuliert als das folgende Prinzip:

Satz 17 (Prinzip der analytischen Fortsetzung)**.** *Es sei f holomorph in einem Gebiet Ω und es sei f_+ holomorph in einem größeren Gebiet $\Omega_+ \supset \Omega$, und es gelte $f(z) = f_+(z)$ für alle $z \in \Omega$, dann ist f_+ die* eindeutige *Fortsetzung dieser Art und zwar im Folgenden Sinne: Ist $\tilde{f}_+$ eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft, dann ist $f_+(z) = \tilde{f}_+(z)$ für alle $z \in \Omega_+$.*

Beispiel 4. In der reellen Analysis lernen wir, dass Formeln der Art

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots = -1$$

keine Aussagekraft haben. Im Kontext der Funktionentheorie aber kann man tatsächlich hinter solchen Identitäten Sinnvolles entdecken und zwar mit Hilfe der analytischen Fortsetzung. Sehen Sie wie? Später im Kurs werden wir auch etwas lernen über solche amüsante Identitäten. Die berühmtetste ist wohl

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12},$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4}.$$

Solche vermutlich "verblüffende" Formeln haben in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erregt und sind der Gegenstand eines populären Videos für Zahlenfreaks, eines Artikels der New York Times, einer Diskussion in einem populären Mathe-Blog von Terence Tao, eines Wikipedia-Artikels, einer Diskussion in Mathematics StackExchange und weitere.

Ein „Spielzeug"-Beispiel (aber dennoch sehr interessant) einer analytischen Fortsetzung ist der Fall der **hebbaren Singularitäten**. Ein Punkt $z_0 \in \Omega$ wird als hebbare Singularität einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\text{nicht definiert}\}$, wenn f in einer punktierten Umgebung von Ω holomorph ist, aber nicht in z_0, wobei aber der Wert von f an z_0 so definiert werden kann, dass f in z_0 holomorph wird.

Satz 18 (Riemann's Satz zu hebbaren Singularitäten)**.** *Es sei f holomorph in Ω mit Ausnahme des Punktes $z_0 \in \Omega$ (an dem f evtl. nicht definiert ist, oder f ist dort definiert und es ist unklar, ob f da holomorph oder stetig ist). f sei beschränkt in einer punktierten Umgebung $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$von z_0. Dann ist f zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz Ω fortsetzbar durch geeignete Definition (oder neue Definition) des Funktionswerts an z_0.*

Beweis. Wir betrachten eine Kreisscheibe $D = D_R(z_0)$ um z_0, deren Abschluss inΩ enthalten ist. Die Idee ist, dass die Cauchysche Integral-Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw =: \tilde{f}(z)$$

für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ erfüllt ist. Haben wir das gezeigt, dann definieren wir $\tilde{f}(z_0)$ als die gleiche Integral-Darstellung und es wird einfach sein zu zeigen, dass das die erwünschte Fortsetzung ist.

Um zu zeigen, dass die vorangehende Darstellung gilt, betrachten wir eine Randkurve $\Gamma_{\epsilon,\delta}$ mit „doppeltem Schlüsselloch“, welche den größten Teil des Kreises $C = \partial D$ umläuft, aber Abzweigungen folgt, um die Punkte z_0 und z zu meiden. Dazu umläuft sie in negativer Richtung entlang einer Kreisbahn mit Radius ϵ. Wir wenden dann ein Grenzwert-Argument an, ähnlich dem Argument im Beweis der Cauchyschen Integralformel. So erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\epsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\epsilon(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}.$$

Auf der rechten Seite ist $f(z)$ gegeben durch die Cauchysche Integralformel (da f bekanntlich holomorph ist auf einer offenen Menge, welche $\overline{D_\epsilon(z)}$) enthält). Der Betrag des zweiten Terms ist beschränkt aufgrund der Annahme, dass f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist. Präziser gilt:

$$\left|\oint_{C_\epsilon(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\right| \leq 2\pi\epsilon \sup_{w\in C_\epsilon(z_0)} |f(w)| \cdot \frac{1}{|z-z_0|-\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0.$$

Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert uns genau die Darstellung von f.

Nun ist die Integral-Darstellung von $\tilde{f}$ definiert (definiert nur mit Hilfe der Terme der Werte von $f(w)$ für $w \in C_R(z_0)$), und die Tatsache, dass dies eine holomorphe Funktion auf ganz $D_R(z_0)$ definiert, ist leicht zu sehen – das haben wir uns eigentlich bereits so vorgestellt. Zum Beispiel trat das relevante Argument, das eine direkte Manipulation der dividierten Differenzen $\frac{1}{h}(\tilde{f}(z+h) - \tilde{f}(z))$ involviert, auf im Beweis der erweiterten Version von Cauchys Integralformel) Eine andere Vorangehensweise ist, zu zeigen, dass die Integration von $\tilde{f}$ über geschlossene Kurven 0 ergibt. (Das erfordert eine Vertauschung der Reihenfolge der zwei Integrationsschritte, die nicht schwer zu rechtfertigen sind.) Dann wendet man den Satz von Morera an. Die detaillierte Durchführung empfehlen wir als Übung. □

Definition 3 (Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen)**.** Es seien $f, (f_n)_{n=0}^\infty$ holomorphe Funktionen auf einem Gebiet Ω. Wir sagen, die Folge f_n konvergiert gegen f **gleichmäßig auf kompakten Teilmengen**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, $f_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig auf K.

Satz 19. *Es konvergiere $f_n \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω und die f_n seien alle holomorph. Dann ist f holomorph und $f_n' \to f'$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω.*

Beweis. Dass f holomorph ist, ist eine einfache Folge einer Kombination des Cauchyschen Integralsatzes und des Satzes von Morera. Präziser: Für jede abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D} = \overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$ geht $f_n(z) \to f$ gleichmäßig auf $\overline{D}$. Insbesondere gilt für jede Kurve γ, deren Bild in der offenen Kreisscheibe $D = D_r(z_0)$ enthalten ist:

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz sind die Integrale in dieser Folge sämtlich 0, also ist $\int_\gamma f(z)\,dz$ auch gleich Null. Da das für alle solchen γ gilt, ist f nach dem Satz von Morera

holomorph auf D. Das stimmt für alle Kreisscheiben in Ω, und da „holomorph“ eine lokale Eigenschaft ist, ist – mit anderen Worten – f holomorph auf ganz Ω.

Nun sei $D = D_r(z_0)$ eine Kreisscheibe, deren Abschluss $\overline{D}$ die Eigenschaft $\overline{D} \subset \Omega$ hat. Für $z \in D$ haben wir dann nach der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f_n'(z) - f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}\, dw. \end{aligned}$$

Deshalb sieht man leicht, dass $f_n'(z) \to f'(z)$ für $n \to \infty$, *gleichmäßig für* $z \in D_{r/2}(z_0)$, da $f_n(w) \to f(w)$ gleichmäßig für $w \in \partial D \subset \overline{D}$, und es ist $|w-z|^{-2} \le (r/2)^{-2}$ für $z \in D_{r/2}(z_0)$, $w \in \partial D$.

Schließlich sei $K \subset D$ kompakt. Für jedes $z \in K$ sei $r(z)$ der Radius einer Kreisscheibe $D_{r(z)}(z)$ um z, deren Abschluss in Ω enthalten ist. Die Familie der Kreisscheiben $\{D_z = D_{r(z)/2}(z) : z \in \Omega\}$ ist eine offene Überdeckung von K, sie hat also nach Heine-Borel eine endliche Teilüberdeckung $D_{z_1}, \dots, D_{z_n}$. Wir zeigten bereits, dass $f_n'(z) \to f'(z)$ gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe D_{z_j}. Wir haben also auch gleichmäßige Konvergenz auf deren Vereinigung, welche K enthält. Damit erhalten wir, dass $f_n' \to f'$ gleichcmäßig auf K – wie behauptet. □

8 Nullstellen, Pole, und der Residuensatz

Definition 4 (zeros)**.** z_0 ist eine Nullstelle einer holomorphen Funktion f, falls $f(z_0) = 0$.

Definition(+Lemma) 5. Ist f eine holomorphe Funktion in einem Gebiet Ω, ungleich Null, und z_0 eine Nullstelle von f, dann kann f in einer Umgebung von z_0 dargestellt werden als

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

Dabei ist $m \ge 1$ und g ist in dieser Umgebung holomorph mit $g(z) \neq 0$. Die Zahl m ist eindeutig bestimmt und wird die **Ordnung** der Nullstelle z_0 genannt, d.h. z_0 wird bezeichnet als **Nullstelle der Ordnung** m.

Eine Nullstelle mit Ordnung 1 wird als **einfache Nullstelle** bezeichnet.

Bemerkung 7. Falls z_0 *keine* Nullstelle von f ist, gilt dieselbe Darstellung mit $m = 0$ (und $g = f$). So sagt man manchmal in gewissen Kontexten, dass z_0 eine Nullstelle der Ordnung 0 sei.

Beweis. [Beweis von Definition + Lemma] Über Potenzreihen-Entwicklungen: Das ähnelt sehr der Argumentation beim Beweis, dass Nullstellen holomorpher Funktionen isoliert sind. Wir schreiben also die Potenzreihenentwicklung (von der wir wissen, dass sie in einer Umgebung von z_0 konvergiert) hin:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-z_0)^n =: (z-z_0)^m g(z), \end{aligned}$$

wobei m der kleinste Index ≥ 0 ist, so dass $a_m \neq 0$. Das liefert die gewünschte Darstellung. Ist andererseits eine Darstellung dieser Art gegeben, dann zeigt die Entwickung von $g(z)$ in eine Potenzreihe, dass m der kleinste Index eines Koeffzienten ungleich Null in der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ sein muss. Das beweist die Eindeutigkeit. □

Definition 6 (Pole)**.** Es sei f definiert und holomorph in einer punktierten Umgebung eines Punktes z_0. Wir sagen, f habe einen **Pol der Ordnung** m in z_0, falls die Funktion $h(z) = 1/f(z)$ (definiert mit dem Wert 0 in z_0) eine Nullstelle der Ordnung m in z_0 hat. Ein Pol der Ordnung 1 wird als **einfacher Pol** bezeichnet.

Bemerkung 8. Wie bei Nullstellen kann man diese Definition auf naheliegende Weise auf „Pol der Ordnung 0“ erweitern. Ist $f(z)$ tatsächlich holomorph und ungleich Null in z_0 (oder es hat eine hebbare Singularität in z_0 und kann durch Definition des Wertes an z_0 holomorph und ungleich Null gemacht werden), dann definieren wir die Ordnung des Pols in z_0 als 0 und sagen, f habe einen Pol der Ordnung 0 in z_0.

Lemma 4. *f hat einen Pol der Ordnung $m \geq 0$ an z_0 genau dann, wenn es in einer punktierten Umgebung von z_0 dargestellt werden kann in der Form*

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z).$$

Dabei ist g holomorph in einer Umgebung von z_0 und es ist $g(z_0) \neq 0$.

Beweis. Wende das Lemma an auf $1/f(z)$. □

Satz 20. *Hat f einen Pol der Ordnung m an z_0, dann ist es eindeutig darstellbar als*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z).$$

Dabei ist G holomorph in einer Umgebung von z_0.

Beweis. Das folgt nach dem vorangehenden Lemma unmittelbar aus der Darstelluzng von $f(z)$ als $(z-z_0)^{-m} g(z)$ und durch Aufteilen der Potenzreihen-Darstellung von $g(z)$ in Potenzen von $(z-z_0)^k$ mit $0 \leq k \leq m-1$ und mit Potenzen mit $k \geq m$. □

Definition 7 (Hauptteil, Residuum)**.** Die Entwicklung $\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ in der vorangehenden Darstellung wird als **Hauptteil** von f am Pol z_0 bezeichnet. Den Koeffizienten a_{-1} nennt man **Residuum von** f **an** z_0. Er wird mit $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$ bezeichnet.

Übung 7. Die Definitionen „Ordnung einer Nullstelle“ , „Ordnung eines Pols“ können konsistent zusammengefasst werden in eine einzige Definition als **(allgemeine) Ordnung einer Nullstelle**, wobei wir, wenn f ein Pol der Ordnung m an z_0 ist, stattdessen sagen, dass f eine Nullstelle der Ordnung $-m$ hat. Wir bezeichnen die Ordnung einer Nullstelle von f an z_0 mit $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$.

Die Definitionen der Nullstellen- bzw. Polordnung kann man kosistent vereinheitlichen: Wenn f eine Nullstelle der Ordnung m an z_0 hat, sagen wir f habe eine Nullstelle eben der Ordnung m. Wenn f ein Pol der Ordnung m an z_0 ist, sagen wir stattdessen, dass f eine Nullstelle der Ordnung $-m$ hat. Denote the order of a zero of f at z_0 by $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$. Beweise mit diesen Definitionen, dass

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f+g) \geq \min\Big(\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g)\Big)$$

(geben Sie eine sinnvolle Definition an für Gleichheit), und dass

$$\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g).$$

Satz 21 (Residuensatz (einfache Version))**.** *Es sei f holomorph in einem Gebiet, das eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}$ enthält, mit Ausnahme eines Poles in $z_0 \in D$. Then*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f).$$

Beweis. Nach der Standardargumentation mit einer Schlüsselloch-Randkurve sehen wir, dass der Kreis $C = \partial D$ im Integral durch einen kleinen Kreis $C_\epsilon = C_\epsilon(z_0)$ mit kleinem Radius $\epsilon > 0$ um z_0 ersetzt werden kann, d.h. wir haben

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \oint_{C_\epsilon} f(z)\,dz.$$

Ist ϵ klein genug, dann können wir im Innern von C_ϵ folgende Zerlegung von f

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{-1} a_k (z - z_0)^k + G(z)$$

in seinen Hauptteil und einen verbleibenden holomorphen Teil. Termweises Integrieren ergibt **a)** 0 für das Integral von $G(z)$ - nach dem Cauchyschen Integralsatz, **b)** 0 auch nach einer Standardrechnung für die Integralpotenzen $(z - z_0)^k$ mit $-m \le k \le -2$ und **c)** $2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f)$ erhalten wir für $r(z - z_0)^{-1}$ – auch nach Standardrechnung. Daraus folgt der Satz. □

Satz 22 (Residuensatz (erweiterte Version))**.** *Es sei f holomorph in einem Gebiet, das eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}$ enthält mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Polen an $z_1, \ldots, z_N \in D$. Dann gilt*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z_k}(f).$$

Beweis. Die Idee ist die gleiche. Man nutzt jetzt eine Randkurve mit mehrfachen Schlüssellöchern und leitet mit einem Grenzwertargument her, dass für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \oint_{C_\epsilon(z_k)} f(z)\,dz.$$

Dann folgert man wie vorangehend.

(Notiz: Die vorangehende Argumentation erscheint mir etwas unredlich, denn sie verlässt sich auf die Annahme, dass eine Kurve mit beliebig - aber endlich - vielen Schlüssellöchern eine „Spielzeug-Kurve“ ist. Das ist zwar intuitiv plausibel, es ist aber zweifellos sehr schwierig zu verstehen oder gar zu beweisen.) □

Satz 23 (Residuensatz (Version für allgemeine Spielzeug-Kurven).)**.** *Es sei f holomorph in einem Gebiet mit einer Spielzeug-Kurve γ (mit positiver Orientierung) und holomorph in dem durch die Kurve eingeschlossenen Gebiet R_γ mit Ausnahme der Pole $z_1, \ldots, z_N \in R_\gamma$. Dann gilt*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_k}(f).$$

Beweis. Konstruiere wieder eine Randkurve mit mehreren Schlüssellöchern γ (annehmend, dass die sich ergebende Randkurve immer noch eine Spielzeugkurve ist). Folgere dann mit einem Grenzwertargument, dass

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \oint_{C_\epsilon(z_k)} f(z)\,dz,$$

für ein hinreichend kleines ϵ gilt. Gehe dann wie eben vor! □

9 Meromorphe Funktionen, Holomorphie in ∞ und die Riemannsche Zahlenkugel

Definition 8 (Meromorphe Funktion)**.** Eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet Ω ist eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\text{undefined}\}$, so dass f holomorph ist mit Ausnahme einer isolierten Menge von Polen.

Definition 9 (holomorph in ∞)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, welche das Komplement von $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ einer geschlossenen Kreisscheibe um 0 enthält. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist **holomorph an** ∞, wenn $g(z) = f(1/z)$ (definiert in einer Umgebung von $D_{1/R}(0)$ of 0) eine hebbare Singularität in 0 hat. In diesem Fall definieren wir $f(\infty) = g(0)$ (der Wert, der g in 0 holomorph macht).

Definition 10 (Ordnung einer Nullstelle/ Pol in ∞)**.** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, welche das Komplement $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ einer geschlossenen Kreisscheibe um 0 enthält. Wir sagen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ habe eine Nullstelle (bzw. einen Pol)) der Ordnung m in ∞, falls $g(z) = f(1/z)$ eine Nullstelle (bzw. einen Pol)der Ordnung m an $z = 0$ hat – nach geeigneter Definition des Wertes von g an der Stelle 0.

Es ist ein nützliches Konzept, sich meromorphe Funktionen als holomorphe Funktionen mit Wertebereich auf der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ vorzustellen. Wir wollen jetzt definieren, was das sein soll.

Definition 11 (Riemannsche Zahlenkugel)**.** Die Riemannsche Zahlenkugel (auch bekannt als die **erweiterten komplexen Zahlen**) ist die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, versehen mit der folgenden zusätzlichen Struktur:

- *Topologisch* stellen wir uns $\widehat{\mathbb{C}}$ vor als die **1-Punkt-Kompaktifizierung** von $\mathbb{C}$; d.h., wir fügen zu $\mathbb{C}$ ein Element ∞ dazu (genannt der „Punkt Unendlich“) und sagen, die Umgebungen von ∞ sind die Komplemente kompakter Teilmengen in $\mathbb{C}$. Das verwandelt $\widehat{\mathbb{C}}$ auf einfache Weise in einen topologischen Raum.

- *Geometrisch*können wir $\widehat{\mathbb{C}}$ mit einer tatsächlichen Kugel identifizieren, die in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist, nämlich mit

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\right\}.$$

  Die Identifikation erfolgt über **stereografische Projektion**, die explizit gegeben ist durch die Formel

$$(X,Y,Z) \in S^2 \longmapsto \begin{cases} x + iy = \frac{X}{1-Z} + i\frac{Y}{1-Z} & \text{falls } (X,Y,Z) \neq (0,0,1), \\ \infty & \text{falls } (X,Y,Z) = (0,0,1). \end{cases}$$

  Siehe Seite 88 in [11] für mehr Details. Man kann überprüfen, dass diese geometrische Identifikation ein Homeomorphismus zwischen S^2 (versehen mit der aus dem $\mathbb{R}^3$ üblichen Topologie) und $\widehat{\mathbb{C}}$ (mit der vorhin definierten 1-Punkt-Kompaktifizierunss-Topologie).

- *Analytisch:* Die vorangehende Definition der Holomorphie einer Funktion in einer Umgebung von ∞ holomorph in ∞ zu sein, ermöglicht es $\widehat{\mathbb{C}}$ die Struktur einer **Riemannschen Fläche** zu geben (der einfachste Typ einer Mannigfaltigkeit mit einer komplexanalytischen Struktur). Details dazu findet man in vielen Lehrbüchern und online-Ressourcen. In diesem Kurs diskutieren wir das nicht im Detail.

Mit den vorangehenden Definitionen kann das Konzept der „meromorphen Funktion“ $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\text{undefiniert}\}$ verstanden werden als holomorphe Funktion $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ — d.h., das zugrunde liegende Konzept der Definition ist immer noch das der Holomorphie, ertreckt sich aber auch auf Funktionen, welche Werte in $\widehat{\mathbb{C}}$ annehmen, einer anderen Riemannschen Fläche als $\mathbb{C}$.

Definition 12 (Klassifikation von Singularitäten)**.** Falls eine Funktion $f : \Omega \to \widehat{\mathbb{C}} \cup \{\text{undefiniert}\}$ in einer punktierten Umgebung von $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ von z_0 holomorph ist, dann sagen wir, dass f eine **Singularität** in z_0 hat, falls f in z_0 nicht holomorph ist. Wir klassifizieren Singularitäten in drei Arten, zwei davon haben wir bereits definiert:

- **Hebbare Singularitäten**: Man kann f an z_0 holomorph machen, indem man seinen Wert an z_0 geeignet definiert ;
- **Pole**;
- Jede Singularität, die nicht hebbar ist oder ein Pol ist, wird **wesentliche Singularität** genannt.

Über eine Funktion, die in einer Umgebung von ∞ definiert ist, aber nicht holomorph in ∞ ist, sagen wir, dass f eine Singularität in ∞ hat. Diese klassifizieren wir als hebbar, als Pol oder als wesentliche Singularität entsprechend dem Typ von Singularität, der bei $z \mapsto f(1/z)$ in $z = 0$ vorliegt.

Satz 24 (Satz von Casorati-Weierstrass zu wesentlichen Singularitäten)**.** *Es sei f holomorph in einer punktierten Umgebung $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ von z_0 und habe eine wesentliche Singularität in z_0. Dann ist das Bild von $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ der punktierten Umgebung von f dicht in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass der Abschluss $\overline{f(D_r(z_0)\setminus\{z_0\})}$ einen Punkt $w \in \mathbb{C}$ nicht enthält. Dann ist $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ eine holomorphe und beschränkte Funktion in $D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$. Nach Riemann's Satz über hebbare Singularitäten ist die Singularität in z_0 hebbar. Wir können also annehmen, dass f in z_0 holomorph ist - nach geeigneter Definition des Funktionswerts. Dann hat

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

entweder einen Pol oder eine hebbare Singularität in z_0, abhängig davon, ob $g(z_0) = 0$ oder $g(z_0) \neq 0$. □

10 Das Argumentprinzip

Definition 13. The **logarithmische Ableitung** einer holomorphen Funktion $f(z)$ ist gleich $f'(z)/f(z)$.

Lemma 5. *Die logarithmische Ableitung eines Produkts ist gleich der Summe der logarithmischen Ableitungen. Das heißt*

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)'}{\prod_{k=1}^n f_k} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}.$$

Beweis. Zeigen Sie das für $n = 2$ und fahren Sie mit Induktion fort. □

Satz 25 (Das Argumentprinzip)**.** *Es sei f meromorph in einem Gebiet Ω, welches eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D}$ enthält, derart, dass f keine Pole auf dem Rand ∂D hat. Wir bezeichnen ihre Nullstellen und Pole im Inneren von D mit $z_1,\dots,z_n$, wobei z_k eine Nullstelle der Ordnung $m_k = \mathrm{ord}_{z_k}(f)$ sei (im vorhin erwähnten Sinn, d.h. $m_k = m$ ist eine positive ganze Zahl, wenn z_k eine Nullstelle der Ordnung m ist, und $m_k = -m$ ist eine negative ganze Zahl, wenn z_k iein Pol der Ordnung m ist). Dann gilt*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{k=1}^n m_k \\ &= [\text{Gesamtzahl der Nullstellen von } f \text{ im Inneren von } D] \\ &\quad - [\text{Gesamtzahl von Polen von } f \text{ im Inneren von } D]. \qquad (1)\end{aligned}$$

Beweis. Definiere

$$g(z) = \prod_{k=1}^n (z-z_k)^{-m_k} f(z).$$

Dann ist $g(z)$ meromorph auf Ω, hat keine Singularitäten auf ∂D, und im Innern von D hat g keine Nullstellen oder Pole, nur hebbare Singularitäten in $z_1,\dots,z_n$ (wenn wir also seine Werte an diesen Stellen neu definieren, dann können wir annehmen, dass g in D) holomorph ist. Es folgt, dass

$$f(z) = \prod_{k=1}^n (z-z_k)^{m_k} g(z).$$

Nimmt man von dieser Gleichung die logarithmische Ableitung, dann erhält man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Die Behauptung folgt nun, indem man diese Gleichung integriert und den Residuensatz anwendet. (der Term $g'(z)/g(z)$ ist holomorph auf D und trägt deshalb nichts zum Integral bei). □

Bemerkung 9. In ähnlicher Weise folgert man, dass der Satz auch gilt, wenn man den Kreis durch eine „Spielzeug-Randkurve“ γ ersetzt.

Der Beweis zeigt nicht - wie auch einige andere mathematische Beweise - wie er funktioniert, d.h. die Tatsache dass die Formel (1) eine ziemlich einfache intuitive Erklärung hat: Zunächst halten wir fest, dass das Integral im Argumentprinzip dargestellt werden kann als

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w}\, dw.\end{aligned}$$

Das ist ein Integral von dw/w über die Randkurve $f \circ \gamma$ — das Bild von γ unter f. Beachte nun, dass die Differentialform dw/w in der Funktionentheorie eine spezielle geometrische Bedeutung hat. Wir haben nämlich

$$\frac{dw}{w} = \text{“}d\,(\log w)\text{”} = \text{“}d\,(\log|w| + i \arg w)\text{”}.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in Anführungszeichen, da der Logarithmus und das Argument keine einwertigen Funktionen sind, d.h. es muss erklärt werden, was solche Formeln bedeuten sollen. Aber wenigstens ist $\log|w|$ wohldefiniert für eine Kurve, welche die Null nicht kreuzt. Integriert man also $f \circ \gamma$ über eine geschlossene Kurve, dann ist der Realteil nach dem Fundamentalsatz der Analysis gleich Null. Der Imaginärteil (der nach Division durch $2\pi i$ reell wird) kann intuitiv interpretiert werden als der *Argumentwechsel über der Kurve* — d.h. anfangs bei $t = a$ fixiert man einen spezifischen Wert von $\arg w = \arg \gamma(a)$; wächst dann t von $t = a$ nach $t = b$, dann verfolgt man das Anwachsen oder Fallen des Arguments beim Wandern entlang der Kurve $\gamma(t)$; wenn man das richtig macht (d.h. auf stetige Art und Weise), wird das Argument am Ende einen wohldefinierten Wert haben. Da die Kurve geschlossen ist, muss die Gesamtänderung des Arguments ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein und die Division durch $2\pi i$ macht daraus eine ganze Zahl.

Natürlich erklärt dies auch den Namen „Argumentprinzip“, welcher beim ersten Hören als weit hergeholt und beliebig erscheinen kann.

Verbindung mit Umlaufzahlen. Die vorangehenden Überlegungen zeigen, dass im Allgemeinen ein Integral der Form

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w}\, dw$$

über eine geschlossene Kurve γ, welche die Null nicht trifft, zu interpretieren ist als „Gesamtzahl der Umläufe einer Kurve γ um den Ursprung“ ,” wobei diese Zahl positiv ist, wenn die

Kurve in positiver Richtung läuft, negativ, wenn sie in negativer Richtung umläuft. Sie ist 0, wenn sich das Argument nicht ändert. Diese Zahl wird besser bezeichnet als **Umlaufzahl** von f um $w = 0$ (manchmal wird sie auch **Index** der Kurve um 0 genannt) und bezeichnet mit

$$\mathrm{Ind}_0(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Allgemeiner kann man die Umlaufzahl an $z = z_0$ definieren als Anzahl der Umläufe einer Kurve γ um einen Punkt z_0 und das ist, wie man leicht sieht, gegeben durch

$$\mathrm{Ind}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Auch hier wird angenommen, dass γ den Punkt z_0 nicht trifft.

Beachte, dass die Umlaufzahl ein *topologisches* Konzept der ebenen Geometrie ist, das ohne jeden Bezug zur Funktionentheorie studiert werden kann. Meiner Meinung nach ist das auch richtig. Es ist möglich und nicht besonders schwer, die Umlaufzahl mit rein topologischen Mitteln zu definieren - ohne Kurvenintegrale. Dann kann man zeigen, dass analytische und topologische Definition dasselbe sind. Wie könnte eine topologische Definition aussehen?

Satz 26 (Satz von Rouché)**.** *Es seien f, g holomorph im Gebiet Ω, das einen Kreis $\gamma = C$ und sein Inneres enthält (oder allgemeiner eine „Spielzeug-Kurve“ γ und das Gebiet U, das sie einschließt). Falls $|f(z)| > |g(z)|$ für alle $z \in \gamma$, dann haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen im Inneren des Gebiets U.*

Beweis. Definiere $f_t(z) = f(z) + tg(z)$ für $t \in [0,1]$, und beachte, dass $f_0 = f$ und $f_1 = f + g$, und dass die Bedingung $|f(z)| > |g(z)|$ auf γ ompliziert, dass f_t keine Nullstellen auf γ hat für jedes $t \in [0,1]$. Es bezeichne

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz.$$

Das ist nach dem Argumentprinzip die Anzahl der „verallgemeinerten Nullstellen“ (Nullstellen oder Pole , nach Vielfachheiten gezählt) von f_t in U. Insbesondere ist die Funktion $t \mapsto n_t$ ganzzahlig. Falls wir nun auch wüssten, dass sie stetig ist, dann müsste sie konstant sein (einfache Übung: jede stetige Funktion mit ganzzahligen Werten auf einem Intervall $[a,b]$ ist konstant), dann würden wir insbesondere folgern können, dass $n_1 = n_0$.

Um die Stetigkeit von n_t zu beweisen, beachten wir, dass die Funktion $g(t,z) = f_t'(z)/f_t(z)$ stetig ist, also gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $[0,1] \times \gamma$. Für $s,t \in [0,1]$ mit $|t-s| < \delta$ können wir schreiben

$$\begin{aligned}|n_t - n_s| &\le \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma |g(t,z) - g(s,z)| \cdot |dz| \\ &\le \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{len}(\gamma)\sup\{|g(u,z) - g(v,z)| : z \in \gamma,\ u,v \in [0,1],\ |u-v| < \delta\}.\end{aligned}$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ können wir ein δ wählen, das sicherstellt, dass dieser Ausdruck $< \epsilon$ ist, sofern $|t-s| < \delta$ – eben aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit. Genau das brauchen wir, um zu zeigen, dass $t \mapsto n_t$ stetig ist. □

Wie das Argumentprinzip hat der Satz von Rouché eine ziemlich amüsante intuitive Erklärung, die ich im Buch *Visual Complex Analysis* von Tristan Needham gefunden habe. Der Slogan, der ins Spiel kommt, ist „walking the dog“ (den Hund ausführen). Stellen Sie sich vor,

sie spazierten in einem großen leeren Park, welcher einen gewissen Punkt 0 (den Ursprungspfosten) hat. Du startest an einem Punkt X und spazierst entlang einer Kurve und kommst schließlich wieder zu dem Punkt X. N sei deine Umlaufszahl um den Ursprungspfosten – d.h die Gesamtzahl deiner Umläufe um den Pfosten mit dem geeigneten Vorzeichen.

Stell dir nun vor, ein Hund läuft an deiner Seite mit - manchmal näher, manchmal ferner. Während Du deinen Weg C_1 durchläufst, läuft der Hund auf seinem eigenen Weg C_2, der auch an derselben Stelle beginnt und endet. Es sei M die Umlaufzahl des *Hundes* um den Pfosten im Ursprung. Können wir sagen, dass $N = M$? Die Antwort ist: *Ja, das können wir unter der Voraussetzung, dass der Abstand des Hundes immer kleiner war als dein Abstand zum Pfosten.* Um das einzusehen, stellen wir uns vor, du würdest den Hund an einer Leine mit variabler Länge führen. Wäre die Abstands-Bedingung nicht erfüllt, dann könnte der Hund den Pfosten erreichen, einen kurzen Umlauf machen, während du weit weg bist und während des Hunde-Umlaufs den Pfosten nicht (vollständig) umläufst - was einen Knoten am Pol verursachen würde.

Überraschenderweise beschreibt das genau die Situation im Satz von Rouché - mit folgender Übersetzung: Die Kurve $f \circ \gamma$ repräsentiert deinen Weg. Die Kurve $(f + g) \circ \gamma$ repräsentieirt den Hundeweg; $g \circ \gamma$ repräsentiert den Vektor, der von dir auf den Hund zeigt; die Bedingung $|f| > |g|$ entlang γ ist genau die korrekte Bedingung dafür, dass der Hund näher bei dir ist, als dein Abstand zum Pfosten.

Und die Folgerung, dass die zwei Umlaufzahlen gleich sind, ist genau die Behauptung im Satz, dass f und $f + g$ dieselbe Zahl verallgemeinerter Nullstellen im Gebiet U haben, das von γ eingeschlossen wird. (siehe die vorangehende Diskussion bezüglich der Verbindung des Integrals $(2\pi i)^{-1} \oint_\gamma f'/f \, dz$ und der Umlauf zahl von $f \circ \gamma$ um 0).

Übung 8. Nehmen Sie sich etwas Zeit und denken Sie nach über diese Analogie und seien Sie sicher, dass Sie diese verstanden haben. Wahrscheinlich werden Sie einige technische Details des Beweises des Satzes von Rouché in den nächsten Wochen und Monaten vergessen, aber hoffentlich erinnern Sie sich länger an die intuitive Erklärung.

Eine weitere kleine kryptische Bemerkung zum Nachdenken: Der vorgestellte Beweis des Satzes von Rouché kann interpretiert werden als Aussage über die Invarianz gewisser Integrale unter der Homotopie von zwei Kurven. Sehen Sie wie?

11 Anwendungen des Satzes von Rouché

Rouché's Satz ist ein wichtiges Werkzeug zum Abschätzen der Nullstellen von Polynomen und anderer Funktionen in Gebieten von Interesse (Siehe die Übungen 28–29 auf Seite 89). Die folgenden Ergebnisse zeigen, wie man Rouché's Satz auch nutzen kann, um interessante theoretische Aussagen herzuleiten

Satz 27 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Holomorphe Funktionen sind* ***offene Abbildungen****, d.h. sie bilden offene Mengen ab auf offene Mengen.*

Beweis. Es sei f holomorph im Gebiet Ω, $z_0 \in \Omega$, und es sei $w_0 = f(z_0)$. Was wir zeigen müssen ist, dass das Bild jeder Umgebung $D_\epsilon(z_0)$ für $\epsilon > 0$ eine Umgebung $D_\delta(z_0)$ von w_0 enthält für

ein $\delta > 0$. Wir fixieren ein w (visuell nahe bei w_0 gelegen), und definieren

$$h(z) = f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) =: F(z) + G(z).$$

Die Idee ist nun, den Satz von Rouché anzuwenden auf $F(z)$ und $G(z)$. Wir nehmen ein $\epsilon > 0$ hinreichend klein, so dass die Kreisscheibe $D_\epsilon(z_0)$ in Ω enthalten ist und keine Lösungen der Gleichung $f(z) = w_0$ außer z_0 enthält (das ist möglich, da Nullstellen holomorpher Funktionen isoliert sind). Nun definieren wir

$$\delta = \inf\{|f(z) - w_0| : z \in \overline{D_\epsilon(z_0)}\},$$

also ist $\delta > 0$ und $|f(z) - w_0| \geq \delta$ für z auf dem Kreis $|z - z_0| = \epsilon$. Das bedeutet, dass unter der Annahme, dass $|w - w_0| < \delta$ (d.h., falls w nah genug bei w_0 liegt) die Bedingung $|F(z)| > |G(z)|$ in Rouché's Satz erfüllt ist für $z \in D_\epsilon(z_0)$. Daraus folgt nun, dass die Gleichung $h(z) = 0$ (oder dazu äquivalent $f(z) = w$) dieselbe Anzahl Lösungen hat (insbesondere mindestens eine Lösung) wie die Gleichung $f(z) = w_0$ in der Kreisscheibe $D_\epsilon(z_0)$. Das war zu zeigen. □

Korollar 8 (Maximumprinzip)**.** *Es sei f eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet Ω, dann kann $|f|$ nicht ein Maximum auf Ω annehmen.*

Beweis. Triviale Übung. □

Am Anfang des Kurses diskutierten wir mehrere Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra. Einer davon, der topologische Beweis, wurde nur skizziert. Als letzte Demonstration der „Mächtigkeit" des Satzes von Rouché wendet sich das Problem 30 auf Seite 38 an Sie mit der Empfehlung, den topologischen Beweis mit Hilfe des Satzes von Rouché zu präzisieren.

12 Einfach zusammenhängende Gebiete und eine allgemeine Version von Cauchy's Satz

Definition 14 (Homotope Kurven)**.** Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zwei parametrisierte Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ (der Einfachheit halber seien diese definiert auf $[0,1]$) heißen **homotop** (mit fixen Endpunkten), falls $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, und falls eine Funktion $F : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ derart existiert, dass

i) F is continuous.

ii) $F(0,t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$.

iii) $F(1,t) = \gamma_2(t)$ für alle $t \in [0,1]$.

iv) $F(s,0) = \gamma_1(0)$ für alle $s \in [0,1]$.

v) $F(s,1) = \gamma_1(1)$ für alle $s \in [0,1]$.

Die Abbildung F nennt man eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_2. *Intuitive Vorstellung:* Für jedes $s \in [0,1]$ definiert die Funktion $t \mapsto F(s,t)$ eine Kurve, welche die zwei Endpunkte $\gamma_1(0)$, $\gamma_1(1)$ verbindet. Während s von 0 nach 1 läuft, geht diese Familie von Kurven auf stetige Weise von der Kurve γ_1 über in γ_2, wobei die Endpunkte immer gleich bleiben.

Übung 9. Beweise, dass die Relation „zwei Kurven sind homotop“ eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 15 (Einfach zusammenhängendes Gebiet)**.** Ein Gebiet Ω heißt **einfach zusammenhängend**, wenn beliebige zwei Kurven γ_1, γ_2 in Ω mit denselben Endpunkten homotop sind.

Bemerkung 10. Ein verbreiteter alternativer Weg, die Homotopie von Kurven zu definieren, ist die Definition für geschlossene Kurven, wobei die Endpunkte zwar nicht fix sind, die Homotopie aber die Kurven geschlossen halten muss, während sie diese deformiert. Die Definition eines einfach zusammenhängenden Gebiets lautet dann, dass beliebige zwei geschlossene Kurven homotop sind. Es ist leicht zu zeigen, dass diese zwei Definitionen äquivalent sind.

Satz 28 (Homotopie-Invarianz)**.** *Es sei f holomorph im Gebiet Ω und γ_0,γ_1 seien zwei homotope Kurven auf Ω mit den gleichen Endpunkten, dann ist*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Beweis. Dieser Beweis beruht auf der Idee, die globale Aussage zur Gleichheit der zwei Kurvenintegrale in eine lokale Aussage zu verwandeln, ähnlich wie im Beweis des Satzes von Goursat, aber in einem etwas allgemeineren Rahmen. (Siehe auch die Seiten 93–95 in [11] für eine Beweisvariante, die im Folgenden dargestellt wird.)

Es bezeichne $F : [0,1]\times[0,1] \to \Omega$ die Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, und für jedes $s \in [0,1]$ bezeichne $\gamma_s : [0,1] \to \mathbb{C}$die Kurve $\gamma_s(t) = F(s,t)$. Die Strategie des Beweises ist zu zeigen, dass es Werte $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = 1$ gibt, so dass

$$\int_{\gamma_{s_0}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{s_1}} f(z)\,dz = \ldots = \int_{\gamma_{s_{n-1}}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{s_n}} f(z)\,dz.$$

D.h. wir wollen zeigen, dass eine leichte Störung des s-Parameters den Wert des Integrals nicht ändert. Dazu brechen wir für zwei fixe Werte $0 \le s < s' \le 1$, welche nahe beieinander liegen, (das werden wir gleich präzisieren) das t-Intervall $[0,1]$, über dem die Kurven s, s' definiert sind, in sehr kleine Segmente auf, indem wir Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ fixieren, die sehr nah beieinander liegen (auch das werden wir präzisieren, sobald wir verstehen, was zu tun ist, damit die Argumente stimmen) und können dann schreiben

$$\int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_s([t_{j-1},t_j])} f(z)\,dz, \qquad \int_{\gamma_{s'}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_{s'}([t_{j-1},t_j])} f(z)\,dz.$$

Wir werden nun zeigen, dass diese zwei Integrale gleich sind, indem wir unsere Kenntnis lokaler Eigenschaften der analytischen Funktion f nutzen. Speziell nehmen wir an, dass wir für jedes $1 \le j \le m$ wissen, dass es eine offene Kreisscheibe D_j gibt, welche die konvexe Hülle der Vereinigung der zwei Kurvensegmente $\gamma_s([t_{j-1},t_j])$ und $\gamma_{s'}([t_{j-1},t_j])$ ist. Für jedes $0 \le j \le m$ sei η_j ein Geradensegment (betrachtet als parametrisierte Kurve) von $\gamma_s(t_j)$ nach $\gamma_{s'}(t_j)$, und für jedes $1 \le j \le m$ sei Γ_j die geschlossene Kurve $\gamma_s([t_{j-1},t_j])+\eta_j-\gamma_{s'}([t_{j-1},t_j])-\eta_{j-1}$ (die Verkettung der vier Kurven $\gamma_s([t_{j-1},t_j])$, „die Umkehrung von η_{j-1}“). Nach Cauchy's Satz für Kreisscheiben gilt dann

$$\oint_{\Gamma_j} f(z)dz = 0,$$

oder expliziter

$$\int_{\gamma_s([t_{j-1},t_j])} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{s'}([t_{j-1},t_j])} f(z)\,dz = \int_{\eta_{j-1}} f(z)\,dz - \int_{\eta_j} f(z)\,dz.$$

Summiert man dies über j, dann erhält man

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_s} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{s'}} f(z)\,dz &= \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\gamma_s([t_{j-1},t_j])} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{s'}([t_{j-1},t_j])} f(z)\,dz\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\eta_{j-1}} f(z)\,dz - \int_{\eta_j} f(z)\,dz\right) = \int_{\eta_0} f(z)\,dz - \int_{\eta_m} f(z)\,dz = 0,\end{aligned}$$

da im vorletzten Schritt die Summe teleskopiert, und wir im letzten Schritt einfach beobachten, dass η_0 und η_m beide entartete Kurven sind, d.h. jede besteht lediglich aus einem Punkt. ($\gamma_s(0) = F(s,0) = \gamma_{s'}(0)$, bzw. $\gamma_s(1) = F(s,1) = \gamma_{s'}(1)$). Das ist genau die Gleichheit, die wir wollten.

Nun müssen wir noch die Annahmen zu den Kreisscheiben D_j rechtfertigen. Das funktioniert, wenn wir annehmen, dass s und s' hinreichend beieinander liegen und dass die Punkte $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ hinreichend dicht beieinander liegen, mit Stetigkeits- und Kompaktheits-Argumenten. Das geht z.B. so: fixiere $0 \le s \le 1$. Für jedes $0 \le t \le 1$ existiert wegen der Stetigkeit der Homotopie-Funktion F eine Zahl $\delta > 0$ und eine Kreisscheibe $D_{s,t}$ mit Mittelpunkt $\gamma_s(t) = F(s,t)$, so dass für alle $s', t' \in [0,1]$ mit $|s'-s| < \epsilon$, $|t'-t| < \delta$, gilt, dass $\gamma_{s'}(t') \in D_{s,t}$. Die Familie der Kreisscheiben $D_{s,t}$ für $0 \le t \le 1$ ist eine offene Überdeckung der Kurve γ_s (oder präziser ihres Bildes $\gamma_s([0,1])$, und das ist eine kompakte Menge). Nach der Heine-Borel-Eigenschaft gibt es also eine endliche Teilüberdeckung $D_{s,t_0}, \ldots, D_{s,t_m}$. Das genügt als Beweis dafür, dass s' hinreichend nahe an s ist.

Schließlich bezeichne $\delta(s)$ für jedes s den Wert von δ, der vorangehend als Funktion von s gewählt wurde. Die Menge der offenen Intervalle $\{(s-\delta(s), s+\delta(s)) : s \in [0,1]\}$ bildet eine offene Überdeckung des Intervalls $[0,1]$, und so können wir wieder mit der Heine-Borel-Eigenschaft eine endliche Teilüberdeckung finden. Das versetzt uns in die Lage, eine Folge $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ zu finden, deren Existenz wir am Anfang des Beweises behaupteten, in der die Relation

$$\int_{\gamma_{s_{j-1}}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{s_j}} f(z)\,dz$$

für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt. (Dabei spielt s_{j-1} die Rolle von s und s_j spielt die Rolle von s' in der vorangehenden Diskussion). □

Satz 29 (Satz von Cauchy (allgemeine Version))**.** *Es sei f holomorph in einem einfach zuammenhängenden Gebiet Ω. Dann gilt für jede geschlossene Kurve in Ω*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Der Einfachheit halber sei γ eine parametrisierte Kurve auf $[0,1]$. Dann kann man sich γ als Verkettung zweier Kurven γ_1 und $-\gamma_2$ vorstellen, wobei $\gamma_1 = \gamma_{|[0,1/2]}$ und γ_2 die „Umkehrung“ der Kurve $\gamma_{|[1/2,1]}$ ist . Beachte, dass γ_1 und γ_2 dieselben Endpunkte haben.

Nach der Homotopie-Invarianz-Eigenschaft von Kurvenintegralen (wie eben bewiesen) haben wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

□

Korollar 9. *Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet holomorphe Funktion hat eine Stammfunktion.*

Übung 10. Der Beweis des vorangehenden Satzes 28 bedarf – wenn wir ehrlich sind – noch einer kleinen Anstrengung; d.h. der präsentierte Beweis ist formal nicht ganz korrekt, er enthält gewisse Inkonsistenzen zwischen den Annahmen des Satzes und dem, was wir schließlich beweisen. Können Sie diese Inkonsistenzen identifizieren? Welcher zusätzlichen Anstrengung könnte es noch bedürfen, um dieses Probleme zu beheben. Warum glauben Sie, dass der Autor dieser Vorlesungsnotizen und die Autoren des Lehrbuchs [11] es vorzogen, die Sache so darzustellen und die Aussage nicht rigoros ohne jede Ungenauigkeit zu beweisen? (Die letzte Frage ist eine sehr allgemeine in der mathematischen Didaktik; falls Ihnen eine gute Antwort einfällt, könnte das für Sie eine Menge ähnlicher Entscheidungen demystifizieren, welche von Lehrbuch-Autoren und und Lektoren fortgeschrittener Lehrinhalte getroffen werden und es könnte das Studium solcher Inhalte in Zukunft weniger verwirrend machen)

13 Der Logarithmus

Der Logarithmus kann definiert werden als

$$\log z = \log|z| + i\arg z$$

auf jedem Gebiet Ω, das nicht die 0 enthält und wo man eine konsistente, glatt wechselnde Wahl $\arg z$ treffen kann für die z aus Ω. Es ist leicht zu sehen, dass diese Formel eine Inverse der Exponentialfunktion ist.

Ist z.B.

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

(die „geschlitzte komplexe Ebene“ mit entfernter negativer reeller Achse), dann können wir setzen

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z$$

wobei $\operatorname{Arg} z$ so festgelegt wird, dass Werte in $(-\pi, \pi)$ angenommen werden. Diese Festlegung nennt man **Hauptzweig des Logarithmus** — im Grunde ist das eine Standardversion der log-Funktion, für welche die Funktionentheoretiker vereinbart haben, dass sie diese benutzen, wenn es praktisch erscheint (oder nicht unpraktisch erscheint).

Manchmal allerdings will man die log-Funktion auf anderen oder komplizierteren Definitionsmengen betrachten. Wann kann das funktionieren? Die Antwort ist: Genau dann, wenn Ω einfach zusammenhändend ist.

Satz 30. *Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin \Omega$, $1 \in \Omega$. Dann gibt es eine Funktion $F(z) = \log_\Omega(z)$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) F *ist holomorph in* Ω.

ii) $e^{F(z)} = z$ *für alle* $z \in \Omega$.

iii) $F(r) = \log r$ *(der übliche Logarithmus für reelle Zahlen) für alle reellen Zahlen* $r \in \Omega$, *die „hinreichend nahe" bei* 1 *liegen.*

Beweis. Wir definieren F als eine Stammfunktion der Funktion $z \mapsto 1/z$, d.h. als

$$F(z) = \int_1^z \frac{dw}{w},$$

wobei das Integral entlang einer Kurve γ berechnet wird, welche 1 mit z verbindet. Nach der Integral-Version des Cauchyschen Integralsatzes für einfach zusammenhängende Gebiete ist dieses Integral unabhängig von der Kurvenwahl. Wie wir schon gesehen haben, ist diese Funktion holomorph und genügt der Gleichung $F'(z) = 1/z$ für alle $z \in \Omega$. Es folgt, dass

$$\frac{d}{dz}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = e^{-F(z)}(1 - z/z) = 0,$$

also ist $ze^{-F(z)}$ eine konstante Funktion. Da ihr Wert an der Stelle $z = 1$ gleich 1 ist, sehen wir, dass $e^{F(z)} = z$ - wie gefordert. Schließlich gilt für reelle r, die nahe bei 1 liegen, dass $F(z) = \int_1^r \frac{dw}{w} = \log r$. Das sieht man, indem man das Integral entlang des Geradensegments von 1 bis r nimmt. □

Übung 11. Beweisen Sie für den Hauptzweig des Logarithmus die Taylorreihen-Entwicklung

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \qquad (|z| < 1).$$

Übung 12. Modifizieren Sie den vorangehenden Beweis zur Existenz eines Zweigs des Logarithmus für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet Ω, das die 0 nicht enthält, ohne die Annahme dass $1 \in \Omega$. Wie wird in diesem Fall die Schlussfolgerung geschwächt?

Übung 13. Erklären Sie, in welchem Sinne die Logarithmus-Funktion $F(z) = \log_\Omega(z)$, welche die vorangehend bewiesenen Eigenschaften hat, (und ihre Verallgemeinerung in der früheren Übung), eindeutig ist.

Übung 14. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der vorangehenden Logarithmus-Konstruktion:
Ist f holomorph auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω, und $f \neq 0$ auf Ω, dann gibt es eine holomorphe Funktion g auf Ω, bezeichnet als Zweig des Logarithmus von f, mit

$$e^{g(z)} = f(z).$$

Definition 16 (Potenzfunktionen und n-te Wurzeln)**.** Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω können wir nun die Potenzfunktion definieren als $z \mapsto z^\alpha$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$, indem wir setzen

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Im Spezialfall $\alpha = 1/n$ hat das die Bedeutung der n-ten Wurzelfunktion $z \mapsto z^{1/n}$. Sie hat die Eigenschaften

$$(z^{1/n})^n = \left(e^{\frac{1}{n}\log z}\right)^n = e^{n\frac{1}{n}\log z} = e^{\log z} = z.$$

Beachte: Falls $f(z) = z^{1/n}$ eine ausgewählte n-te Wurzel ist, dann ist für beliebiges $0 \le k \le n-1$ die Funktion $g(z) = e^{2\pi ik/n} f(z)$ eine weitere Funktion mit $g(z)^n = z$. Umgekehrt sieht man leicht, dass das genau die möglichen Wahlmöglichkeiten für n-te Wurzelfunktionen sind.

14 Euler's Gamma-Funktion

Die **Eulersche Gamma-Funktion** (sie wird meist nur als Gamma-Funktion bezeichnet) ist eine der wichtigsten speziellen Funktionen der Mathematik. Sie findet Anwendung auf vielen Gebieten, darunter der Kombinatorik, Zahlentheorie, Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitstheorie und viele weitere - und sie ist die am meisten vorkommende transzendente Funktion nach den „elementaren" transzendenten Funktionen (der Exponentialfunktion, dem Logaritmus, den trigonometrischen Funktionen und ihren Inversen), die man in der Schul-Analysis lernt.

Sie ist eine natürliche meromorphe Funktion einer komplexen Variablen, welche die Fakultätsfunktion auf nicht-ganzzahlige Werte erweitert.

In der komplexen Analysis ist sie besonders wichtig im Kontext mit der Mellin-Transformation (einer Variante der Fourier-Transformation; sie ist mit der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen in derselben Weise verbunden wie die gewöhnliche Fourier-Transformation mit der additiven Gruppe der reellen Zahlen verbunden ist).

Die meisten Lehrbücher definieren die Gamma-Funktion auf eine bestimmte Weise und leiten daraus verschiedene äquivalente Darstellungen ab. In Wahrheit ist aber keine Darstellung der Gamma-Funkion fundamentaler oder „natürlicher" als die anderen. Deshalb scheint es logischer zu sein, einfach die verschiedenen Formeln und Eigenschaften aufzuschreiben und dann zu beweisen, dass die verschiedenen Darstellungen äquivalent sind und dass die behaupteten Eigenschaften richtig sind.

Satz 31 (Die Eulersche Gamma-Funktion)**.** *Es gibt genau eine Funktion $\Gamma(s)$ einer komplexen Variablen s mit den folgenden Eigenschaften:*

1. ***Meromorphie:*** *$\Gamma(s)$ ist auf $\mathbb{C}$ meromorph.*
2. ***Verbindung mit Fakultät:*** *$\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.*
3. ***Wichtiger spezieller Wert:*** *$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.*
4. ***Integral-Darstellung:***
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \qquad (\operatorname{Re} s > 0).$$
5. ***Hybride Reihen-Integral-Darstellung :***
$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+s)} + \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

6. ***Unendliche Produkt-Darstellung:***

$$\Gamma(s)^{-1} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n} \qquad (s\in\mathbb{C}),$$

wobei $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right) \doteq 0.577215$ *die* ***Euler-Mascheronische Konstante*** *ist.*

7. ***Grenzwert eines endlichen Produkts:***

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \qquad (s\in\mathbb{C}).$$

8. ***Nullstellen:*** *Die Gamma-Funktion hat keine Nullstellen (also ist* $\Gamma(s)^{-1}$ *eine ganze Funktion).*

9. ***Pole:*** *Die Gamma-Funktion hat Pole genau an den nicht positiven ganzen Zahlen* $s = 0,-1,-2,\ldots$ *und ist überall sonst holomorph. Die Pole an* $s=-n$ *sind einfach und haben die Residuen*

$$\mathrm{Res}_{s=-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Funktionalgleichung:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad (s\in\mathbb{C}).$$

Die Spiegelungsformel *(eine überraschende Verbindung zur Trigonometrie):*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad (s\in\mathbb{C}).$$

Zum Anfang der Beweise haben wir *irgendwie* die Funktion zu definieren, deren Existenz wir behaupten. Nehmen wir also die Formel

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

als unsere „Arbeitsdefinition" $\Gamma(s)$. Dieses uneigentliche Integral konvergiert - wie man leicht sieht - absolut für $\mathrm{Re}(s)>0$, da

$$\left|\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx\right| \le \int_0^\infty e^{-x}|x^{s-1}|\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{\mathrm{Re}(s)-1}\,dx.$$

Den Leser sei es überlassen, zu prüfen (oder die einfache Erklärung in [11] zu lesen), dass die so definierte Funktion in diesem Gebiet holomorph ist.

Integriere als Nächstes partiell, um zu sehen, dass wir wieder für $\mathrm{Re}(s)>0$ haben

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\,dx = -e^{-x}x^s\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}\,dx = s\Gamma(s).$$

Das ist die Funktionalgleichung.

Wir kombinieren die triviale Auswertung $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ mit der Funktionalgeichung und sehen induktiv, dass $\Gamma(n+1) = n!$.

Der spezielle Wert $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ folgt sofort durch Variablenwechsel $x = u^2$ im Integral und einen Rückgriff auf das standardmäßige Gauss-Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-u^2}2\,du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

Nun kann man die Funktionalgleichung nutzen und eine analytische Fortsetzung von $\Gamma(s)$ auf eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definieren: Zum Beispiel können wir definieren

$$\Gamma_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Das ist eine auf $\mathrm{Re}(s) > -1, s \neq 0$ holomorphe Funktion, die übereinstimmt mit $\Gamma(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Nach dem Prinzip der holomorphen Fortsetzung liefert das eine Fortsetzung von $\Gamma(s)$ auf das Gebiet $\mathrm{Re}(s) > -1$. Wegen des Faktors $1/s$ und der Tatsache, dass $\Gamma(1) = 1$, sehen wir auch, dass $\Gamma_1(s)$ einen einfachen Pol an $s = 0$ hat mit Residuum 1.

Als nächstes definieren wir für $\mathrm{Re}(s) > -2$

$$\Gamma_2(s) = \frac{\Gamma_1(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)},$$

eine Funktion, welche holomorph ist auf $\mathrm{Re}(s) > -2$, $s \neq 0, -1$ und mit $\Gamma_1(s)$ übereinstimmt für $\mathrm{Re}(s) > -1$, $s \neq 0$. Auch das liefert eine holomorphe Funktion $\Gamma(s)$ auf diesem Gebiet. Die Faktoren $1/s(s+1)$ zeigen, dass $\Gamma_2(s)$ einen einfachen Pol hat an $s = -1$ mit Residuum -1.

Wir fahren induktiv fort: Haben wir eine analytische Fortsetzung $\Gamma_{n-1}(s)$ von $\Gamma(s)$ auf das Gebiet $\mathrm{Re}(s) > -n+1$, $s \neq 0, -1, -2, \ldots, -n+2$, dann definieren wir

$$\Gamma_n(s) = \frac{\Gamma_{n-1}(s+1)}{s} = \ldots = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}.$$

Es ist offensichtlich, dass dies zu einer meromorphen Funktion in $\mathrm{Re}(s) > -n$ führt, deren Pole genau an den Stellen $s = -n+1, \ldots, 0$ liegen und die behaupteten Residuen haben.

Ein alternativer Weg der analytischen Fortsetzung ist die Aufteilung des Integrals, welches $\Gamma(s)$ definiert, in

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$$

und festzuhalten, dass das Integral über $[1, \infty)$ konvergiert (es definiert eine holomorphe Funktion von s) für *alle* $s \in \mathbb{C}$, und dass das Integral über $[0, 1]$ berechnet werden kann, indem man e^{-x} als Potenzreihenentwicklung in x betrachtet und termweise integriert. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ haben wir also

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+s-1}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{n+s-1}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+s)}\end{aligned}$$

Die Rechtfertigung für das Vertauschen von Integration und Summation ist einfach und wird als Übung empfohlen.

Wir haben also nicht nur einen alternativen Beweis für die meromorphe Fortsetzung von $\Gamma(s)$ erhalten, sondern auch einen Beweis für die hybride Reihen-Integral-Darstellung von $\Gamma(s)$, und diese zeigt auch ganz klar, wo die Pole von $\Gamma(s)$ liegen und dass sie einfache Pole sind mit den richtigen Residuen.

Lemma 6. *Für* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *gilt*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\, dx.$$

Beweis. Für $n \to \infty$konvergiert der Integrand punktweise gegen $e^{-x}x^{s-1}$. Weiter ist der Faktor $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ nach oben beschränkt durch die Funktion e^{-x} (wegen der elementaren Ungleichung $1-t \le e^{-t}$, welche für alle reellen t gilt). Die Behauptung folgt deshalb aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz. □

Lemma 7. *Für* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *gilt*

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\,dx = \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung, dass

$$\int_0^1 (1-x)\,x^{s-1}\,dx = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Das ist leicht direkt verifizierbar. Für die allgemeine Behauptung benutzen wir einen Variablenwechsel und partielle Integration und sehen, dass

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\,dx &= n^s \int_0^1 (1-t)^n t^{s-1}\,dt \\ &= n^s\left[(1-t)^n\frac{t^s}{s}\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 n(1-t)^{n-1}\frac{t^s}{s}\,dt\right] \\ &= n^s \cdot \frac{n}{s}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^{(s+1)-1}\,dt.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion über n. □

Korollar 10. *Für* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *gilt*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

Beweis. [Beweis der Darstellung von $\Gamma(s)$ als unendliches Produkt] Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ haben wir

$$\begin{aligned}\Gamma(s)^{-1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!\,n^s} \\ &= s\lim_{n\to\infty} e^{-s\log n}\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right) \\ &= s\lim_{n\to\infty} e^{s\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n\right)}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-s/k} \\ &= se^{\gamma s}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}.\end{aligned}$$

□

Wit überprüfen un, ob das unendliche Produkt tatsächlich absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ konvergiert und damit eine ganze Funktion ist. Wir beginnen mit einigen vorläufigen Beobachtungen für unendliche Produkte.

Wir erinnern uns, dass für eine Folge komplexer Zahlen c_n das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^\infty c_n$ definiert ist als der Grenzwert endlicher Teilprodukte $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n c_k$ – sofern der Grenzwert existiert. Das ist ganz analog zu den unendlichen Reihen. Ein Punkt, der sich in der Terminologie von unendlichen Reihen unterscheidet, ist, dass wir sagen, dass das Produkt $\prod_{n=1}^\infty c_n$ **konvergiert**, wenn der Grenzwert des endlichen Produkts existiert **und** *ungleich Null* ist.

Lemma 8. *Für eine Folge komplexer Zahlen sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $a_n \neq -1$ für alle n und es sei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Dann konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.*

Beweis. Bei diesen Voraussetzungen existiert ein hinreichend großes $N_0 \geq 1$, so dass $|a_n| < 1/2$ für alle $n \geq N_0$. Daraus folgt insbesondere, dass $1 + a_n = \exp(\mathrm{Log}(1+a_n))$, wobei $\mathrm{Log}(z)$ der Hauptzzweig des Logarithmus ist. Nun reicht es aufgrund der Voraussetzungen zu zeigen, dass das unendliche Produkt $\prod_{n=N_0}^{\infty}(1+a_n)$ konvergiert. Das kann man aber schreiben als

$$\prod_{n=N_0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=N_0}^{n}(1+a_k) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=N_0}^{n}\exp\left(\mathrm{Log}(1+a_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=N_0}^{n}\mathrm{Log}(1+a_k)\right).$$

Falls wir nun wüssten, dass die unendliche Reihe $\sum_{n=N_0}^{\infty}\mathrm{Log}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N_0}^{n}\mathrm{Log}(1+a_k)$ konvergiert, könnten wir die vorangehende Kette von Ungleichungen fortsetzen als

$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N_0}^{n}\mathrm{Log}(1+a_k)\right) = \exp\left(\sum_{n=N_0}^{\infty}\mathrm{Log}(1+a_n)\right),$$

und da e^z nie gleich 0 ist, würde das bedeuten, dass das Produkt$\prod_{n=N_0}^{\infty}(1+a_n)$ existiert und ungleich Null ist (d.h. das Produkt konvergiert), also dann – wie vorangehend erwähnt – konvergiert und das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergierte dann auch, und die Behauptung wäre bewiesen.

Um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=N_0}^{\infty}\mathrm{Log}(1+a_n)$ zu sehen, erinnern wir uns, dass die Funktion $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ die konvergente Taylorentwicklung

$$\mathrm{Log}(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}(z-1)^m \qquad (|z-1|<1).$$

hat. Insbesondere gibt es eine Konstnate $C > 0$, so dass

$$|\mathrm{Log}(1+w)| \leq |w| + C|w|^2 \qquad \text{falls } |w| < 1/2.$$

Nun nutzen wir die Voraussetzung $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ und folgern, dass

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}|\mathrm{Log}(1+a_n)| \leq \sum_{n=N_0}^{\infty}|a_n| + C\sum_{n=N_0}^{\infty}|a_n|^2 \leq \sum_{n=N_0}^{\infty}|a_n| + C\left(\sum_{n=N_0}^{\infty}|a_n|\right)^2 < \infty.$$

Das wollten wir beweisen. □

Lemma 9. *Es sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen auf einem Gebiet Ω mit der Eigenschaft, dass die Funktionen $1+f_n$ überall holomorph und nirgends gleich Null sind. Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω konvergiert, dann konvergiert auch das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω und zwar gegen eine holomorphe Funktion, die immer ungleich Null.*

Beweis. Das vorangehende Lemma 8 impliziert, dass das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ für jedes $z \in \Omega$ gegen einen Wert ungleich Null konvergiert. Wiederholt man die Abschätzungen aus dem Beweis des vorangehenden Lemmas für jedes z aus einer kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$, dann sieht man, dass die Folge der Partialprodukte $\prod_{k=1}^{n}(1+f_n)$tatsächlich auf kompakten Teilmenggen gleichmäßig konvergiert. Also ist die Grenzfunktion holomorph. □

Beweis. [Beweis, dass $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$ eine ganze Funktion ist.]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}-1\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}+O\left(\frac{z^2}{n^2}\right)\right)-1\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|O\left(\frac{z^2}{n^2}\right)\right| < \infty$$

(Dabei verbirgt die Gross-O-Notation eine unverselle Konstante — die Abhängigkeit von z wird gekapselt im z^2-Faktor). Insbesondere ist die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$. Damit sind wir beinahe in der Situation von Lemma 9. Um allerdings dieses Lema anwenden zu können, das voraussetzt, dass die Funktionen im Produkt ungleich Null sind, muss man etwas sorgfältiger sein und die Nullen aussondern: Für eine fixe Kreisscheibe $D_{N+1/2}(0)$ mit Radius $N+1/2$ um 0 betrachten wir nur das Produkt beginnend an $n=N+1$ – diese Funktionen sind ungleich Null in der Kreisscheibe und mit den vorangehenden Erkenntnissen erhalten wir daraus eine Funktion, die in $D_N(0)$ holomorph und ungleich Null ist. Dann tragen die Faktoren $(1+z/n)$, $n=1,\dots,N$ separat Nullstellen an $z=-1,\dots,-N$ bei. □

Korollar 11 (Die Spiegelungsformel)**.**

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} &= \Gamma(s)^{-1}(-s)^{-1}\Gamma(-s)^{-1}\\ &= \frac{-1}{s}\cdot s e^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}\cdot(-s)e^{-\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)e^{s/n}\\ &= s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)= s\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}=\frac{\sin(\pi s)}{\pi},\end{aligned}$$

wobei wir die Produktdarstellung $\sin(\pi z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$ der sinus-Funktion nutzten, die in einer Hausaufgabe hergeleitet wurde. □

Beweis. [Alternative Herleitung der Spiegelungsformel ([11], Seite 164)]. Wegen analytischer Fortsetzbarkeit genügt es, die Formel für reelle s in $(0,1)$ zu beweisen. Für diese s haben wir

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-s}\Gamma(s)\,dt\\ &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-s}\left(t\int_0^{\infty}e^{-vt}(vt)^{s-1}\,dv\right)dt\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-t(1+v)}v^{s-1}\,dv\,dt = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}e^{-t(1+v)}\,dt\right)v^{s-1}\,dv\\ &= \int_0^{\infty}\frac{v^{s-1}}{1+v}\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}}{1+e^x}\,dx \quad \text{(by setting } v=e^x\text{)}.\end{aligned}$$

Es genügt also, zu beweisen, dass für $0<s<1$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}}{1+e^x}\,dx=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Dieses Integral kann man nach dem Residuensatz berechnen; siehe Beispiel 2 in Abschnitt 2.1, Kapitel 3, Seiten 79–81 in [11] für die Details. □

Notiz: Durch Kombination dieser alternativen Herleitung der Spiegelungsformel mit der Gamma-Funktion in Produktdarstellung erhalten wir einen neuen Beweis für die Darstellung von $\sin(\pi z)$ als unendliches Produkt.

15 Die Riemannsche Zeta-Funktion

15.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Die **Riemannsche Zeta-Funktion** (oft auch nur Zeta-Funktion genannt - wenn keine Gefahr der Konfusion besteht), wird ähnlich wie die Gamma-Funktion als eine der wichtigsten „speziellen Funktionen“ in der höheren Mathematik betrachtet. Allerdings ist die Zeta-Funktion weitaus mysteriöser als die Gamma-Funktion und sie ist nach wie vor Gegenstand vieler berühmter Vermutungen, inklusive der berühmtesten Vermutung, eben der Riemannschen Vermutung. Die **Riemannsche Vermutung** wird von vielen (so auch von mir) als das wichtigste offene Problem der Mathematik betrachtet.

Der Hauptgrund für die Bedeutung der Zeta-Funktion ist ihre Verbindung mit den Primzahlen und mit anderen Konzepten und Größen der Zahlentheorie. Ihr Studium und insbesondere die Versuche, die Riemannsche Vermutung zu beweisen, haben auch ungewöhnlich viele weitere Entwicklungen auf vielen Gebieten der Mathematik stimuliert.

Wie die Gamma-Funktion wird die Zeta-Funktion üblicherweise nur auf einem Teil der komplexen Ebene definiert und ihr Definitionsbereich wird dann durch analytische Fortsetzung erweitert. Ich formuliere das auch hier als Satz, der die Existenz der Zeta-Funktion mit gewissen Eigenschaften behauptet.

Satz 32 (Riemannsche Zeta-Funktion)**.** *Es gibt eine eindeutige Funktion, bezeichnet mit $\zeta(s)$, einer komplexen Variablen s, mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\zeta(s)$ ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.*
2. *For $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist $\zeta(s)$ gegeben durch die Reihe*
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots.$$
3. ***Eulersche Produktfomrel** for $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s)$ hat auch eine unendliche Produktdarstellung*
$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$
wobei das Produkt über die Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$ läuft.
4. *$\zeta(s)$ hat keine Nullstellen im Gebiet $\mathrm{Re}(s) > 1$.*
5. *$\zeta(s)$ hat keine Nullstellen auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$ (Das erfordert einen von der vorangehenden Behauptung abweichenden Beweis).*

6. ***Die „trivialen" Nullstellen:*** *Die Nullstellen von $\zeta(s)$ im Gebiet $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ liegen genau an $s = -2, -4, -6, \ldots$.*

7. *$\zeta(s)$ hat einen eindeutigen Pol an $s = 1$. Es ist ein einfacher Pol mit Residuum 1.*

8. ***Das „Baselproblem" und seine Verallgemeinerungen :*** *Die Werte von $\zeta(s)$ an geraden positiven ganzen Zahlen werden durch Euler's Formel angegeben als*

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ die Bernoulli-Zahlen sind, welche definiert sind als die Koeffzienten in der Taylorentwicklung

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m.$$

Viele Eigenschaften dieser verblüffenden Zahlen wurden in den Hausaufgaben diskutiert.

9. ***Werte an negativen ganzen Zahlen:*** *Wir haben*

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(Beachten Sie: Für negative gerade Zahlen stimmt das mit der vorhin erwähnten Eigenschaft mit den trivialen Nullstellen an $s = -2, -4, -6, \ldots$ überein, denn es ist eine leicht beweisbare Eigenschaft, dass die Bernoullizahlen $B_{2k+1} = 0$ sind für ganze Zahlen $k \geq 1$. Diese Formel aber führt zur Erkenntnis über die Werte von $\zeta(s)$ an negativen ungeraden ganzen Zahlen.)

10. ***Funktionalgleichung:*** *Die Zeta-Funktion erfüllt die Gleichung*

$$\zeta^*(1 - s) = \zeta^*(s),$$

wobei wir mit $\zeta^*(s)$ die ***symmetrierte Zeta-Funktion***

$$\zeta^*(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

bezeichnen.

11. ***Mellin-Transformation:*** *Ein Ausdruck für $\zeta(s)$ gültig für alle $s \in \mathbb{C}$ ist*

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(t^{-\frac{s+1}{2}} + t^{\frac{s-2}{2}} \right) (\vartheta(t) - 1)\, dt,$$

wobei die Funktion $\vartheta(t)$ eine von ***Jacobis Theta-Reihen*** *ist, definiert als*

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

12. ***Darstellung als Kurvenintegral:***
Ein weiterer Ausdruck für $\zeta(s)$, gültig für alle $s \in \mathbb{C}$, ist

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Dabei ist C eine Schlüssellochkurve, gehend von $+\infty$ nach 0 leicht über der positiven x-Achse, dann auf einem Kreis mit kleinem Radius um den Nullpunkt laufend gegen den Uhrzeigersinn, und dann zurücklaufend nach $+\infty$ leicht unterhalb der positiven x-Achse.

13. ***Zusammenhang mit der Primzahlzählung — die „explizite Formel der Zahlentheorie:“*** *Wir definieren* ***Von Mangoldt's gewichtete Primzahlzähl-Funktion***

$$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p,$$

wobei die Summe über alle Primzahlen läuft, die kleiner oder gleich x sind. Dann gilt für alle nicht ganzzahligen $x > 1$:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi),$$

wobei die Summe über alle Nullstellen ρ der Riemannschen Zeta-Funktion läuft, gezählt entsprechend ihrnen Vielfachheiten. (In den meisten Lehrbüchern wird die Summe in zwei Summen aufgeteilt. Eine läuft über die trivialen Nullstellen, welche explizit berechenbar sind und die andere über die viel weniger trivialen Nullstellen im Streifen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Die Summe ist auch nur bedingt konvergent. Konsultieren Sie ein Buch über analytische Zahlentheorie zur geeigneten Interpretation, so dass die Summe konvergiert.)

Die explizite Formel der Zahlentheorie illustriert, dass es für die Primzahlen-Zählung von größter Bedeutung ist, zu wissen, wo die Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen. Insbesondere wird uns der Beweis, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen in $\mathrm{Re}(s) \ge 1$ hat, in die Lage versetzen, einen der berühmtesten Sätze der Mathematik zu beweisen.

Satz 33 (Der Primzahlsatz)**.** *Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x. Dann gilt der berühmte Satz:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \qquad \textit{auch geschrieben als} \qquad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Vermutung 1 (Die Riemannsche Vermutung)**.** *Alle nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen auf der „kritischen Geraden“* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Wir beginnen den Beweis des Satzes 32 mit der Standard-Darstellung $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Da $\sum_n |n^{-s}| = \sum_n n^{-\mathrm{Re}(s)}$, sehen wir, dass die Summe genau dann absolut konvergiert für, wenn $\mathrm{Re}(s) > 1$, und dass die Konvergenz gleichmäßig ist für jede Halbebene der Form $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ mit $\alpha > 1$. Insbesondere konvergiert sie gleichmäßig auf kompakten Teilmengen, also ist $\zeta(s)$ holomorph in diesem Gebiet.

In ähnlicher Weise konvergiert das Eulerprodukt $Z(s) := \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ genau dann absolut, wenn $\sum_p |p^{-s}| = \sum_p p^{-\mathrm{Re}(s)}$ konvergiert, und insbesondere dann, wenn $\mathrm{Re}(s) > 1$. Es folgt, dass $Z(s)$ wohldefiniert, holomorph und ungleich Null ist für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Beweis. [Beweis der Eulerschen Produktformel] Wir beweisen nun, dass $Z(s) = \zeta(s)$. Das ist möglich durch Manipulation der Partialprodukte des $Z(s)$ definierenden unendlichen Pro-

dukts und zwar wie folgt

$$\begin{aligned}\zeta_N(s) := \prod_{p\le N}\frac{1}{1-p^{-s}} &= \prod_{p\le N}(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\ldots)\\ &= \sum_{\substack{n=p_1^{j_1}\cdots p_k^{j_k}\\ p_1,\ldots,p_k \text{ primes} \le N}} \frac{1}{n^s}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Fundamentalsatz der Arithmetik zusammen mit dem Satz, dass bei Multiplikation zweier (oder endlich vieler) konvergenter Reihen die Summanden umgeordnet und in beliebiger Reihenfolge summiert werden dürfen. So haben wir $\zeta_N(s)$ dargestellt als eine Reihe ähnlicher Form wie die Reihe, die $\zeta(s)$ definiert, aber nur mit Termen der Form n^{-s} für diejenigen positiven ganzen Zahlen n, deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen $\le N$ enthält. Es folgt, dass

$$|\zeta(s)-\zeta_N(s)| \le \sum_{n>N}\frac{1}{n^s}.$$

Der Grenzübergang $N\to\infty$ zeigt, dass $Z(s)=\lim_{N\to\infty}\zeta_N(s)=\zeta(s)$. Daraus folgt die Gültigkeit der Eulerschen Produktformel. □

Korollar 12. *$\zeta(s)$ hat keine Nullstellen im Gebiet* $\mathrm{Re}(s)>1$.

Beweis. Die Eulersche Produktformel liefert ein konvergentes Produkt für $\zeta(s)$ in diesem Gebiet und jeder Faktor $(1-p^{-s})^{-1}$ hat keine Nullstellen. □

Zum Beweis der Funktionalgleichung erfordert ein mächtigeres Werkzeug aus der harmonischen Analysis, die Poisson'sche Summationsformel.

Satz 34 (Die Poisson'sche Summationsformel)**.** *Für eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit einigem „Wohlverhalten" haben wir*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k),$$

wobei

$$\hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$$

die Fourier-Transformation von f ist.

Beweis. Wir definieren eine Funktion $g:[0,1]\to\mathbb{C}$ durch

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n),$$

die sogenannte „Periodisierung" von f. Nun zeige die Funktion $f(x)$ „hinreichendes Wohlverhalten" (d.h. sie nimmt schnell genug ab für $x\to\pm\infty$, und $g(x)$ verhalte sich auch wieder gutartig und habe vernünftige Glattheitseigenschaften), dann besagt ein Standardergebis der harmonischen Analysis , dass $g(x)$ eine konvergente Fourier-Entwicklung hat der Form

$$g(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{g}(k)e^{2\pi ikx},$$

wobei die Fourier-Koeffizienten $\hat{g}(k)$ berechenbar sind als

$$\hat{g}(k) = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi ikx}\,dx.$$

Setzt man in der Formel insbesondere $x = 0$ für $g(x)$, dann erhält man die grundlegende Tatsache, dass

$$g(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k).$$

Beachte aber, dass $g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, die Größe auf der linke Seite der Poissonschen Summationsformel ist. Andererseits kann der Fourierkoeffizient $\hat{g}(k)$ mit Hilfe der Terme der Ausgangsfunktion $f(x)$ dargestellt werden als:

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \int_0^1 g(x)e^{-2\pi ikx}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)e^{-2\pi ikx}\,dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi ikx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2\pi iku}\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi iku}\,du = \hat{f}(k).\end{aligned}$$

Die Kombination dieser Beobachtungen ergibt die Behauptung - sieht man einmal davon ab, dass wir die genauen Sachverhalte und Annahmen zu f beiseite gelassen haben: Wir wenden schließlich die Poissonsche Summationsformel an auf eine Funktion mit extrem gutem Verhalten. Deshalb wollte ich keine Zeit damit verschwenden, diese Details zu diskutieren. □

Satz 35. *Die Jacobi-Theta-Funktion $\vartheta(t)$ erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\vartheta(1/t) \qquad (t > 0).$$

Bemerkung 11. Gleichungen dieser Form werden studiert in der Theorie der **modularen Formen**, ein Gebiet der Mathematik, welches Zahlentheorie, Funktionentheorie und Algebra auf sehr überraschende und schöne Weise kombiniert.

Beweis. Die Beweisidee ist, die Poisson'sche Summationsformel anzuwenden auf die Funktion

$$f(x) = e^{-\pi tx^2},$$

für welche überprüft werden kann, dass

$$\hat{f}(k) = t^{-1/2}e^{-\pi k^2/t},$$

und zwar dadurch, dass man einen einfachen Variablenwechsel in der Standard-Integralauswertung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi ixu}\,du = e^{-\pi u^2}$$

vornimmt. (d.h., die Tatsache, dass $e^{-\pi x^2}$ ihre eigene Fourier-Transformation ist); die Auswertung erfolgt in Beispiel 1, Kapitel 2, Seiten 42–44 in [11]. Mit der vorangehenden Substitution $f(x)$ und $\hat{f}(k)$ wird aus der Poisson'schen Summationsformel genau die Funktionalgleichung für $\vartheta(t)$. □

Übung 15. (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Randkurven-Integral

$$\oint_{\gamma_N} \frac{e^{-\pi z^2 t}}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz,$$

wobei γ_N das Rechteck mit den Scheiteln $\pm(N + 1/2) \pm i$ ist (mit einer positiven ganzen Zahl N). Bilden Sie dann den Grenzwert für $N \to \infty$ und leiten Sie folgende Integral-Darstellung für die Jacobi-ϑ-Funktion her:

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \frac{e^{-\pi z^2 t}}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz - \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \frac{e^{-\pi z^2 t}}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz.$$

(b) Expandieren Sie in dieser Darstellung $(e^{2\pi i z} - 1)^{-1}$ als geometrische Reihe in $e^{-2\pi i z}$ (für das erste Integral) und als geometrische Reihe in $e^{2\pi i z}$ (für das zweite Integral). Berechnen Sie die resultierenden unendlichen Reihen, begründen Sie ausführlich alle Schritte, mit denen Sie einen alternativen Beweis der Funktionalgleichung von $\vartheta(t)$ erhalten.

Lemma 10. *Das asymptotische Verhalten von $\vartheta(t)$ nahe $t = 0$ und $t = +\infty$ ist gegeben durch*

$$\vartheta(t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \qquad (t \to 0+),$$
$$\vartheta(t) = 1 + O(e^{-\pi t}) \qquad (t \to \infty).$$

Beweis. Das asymptotische Verhalten für $t \to \infty$ folgt sofort aus

$$\vartheta(t) - 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \le 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t} = \frac{2e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}},$$

was beschränkt ist durch $Ce^{-\pi t}$, falls $t > 10$. Die Anwendung der Funktionalgleichung ergibt nun $\vartheta(t) = t^{-1/2}(1 + O(e^{-\pi/t})) = O(t^{-1/2})$ für $t \to 0+$. □

Beweis. [Beweis der analytischen Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$] Wir starten mit der für $\mathfrak{Re}(s) > 0$ gültigen Formel:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s/2-1}\, dx.$$

Der lineare Variablenwechsel $x = \pi n^2 t$ bringt das in die Form

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}\, dt.$$

Summiert man die linke Seite über $n = 1, 2, \ldots$, dann erhält man $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ — das ist die Funktion, die wir mit $\zeta^*(s)$ bezeichneten — und das fügt die schärfere Annahme hinzu, dass $\mathrm{Re}(s) > 1$. Für die rechte Seite haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1}\, dt. &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}\right) t^{s/2-1}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\vartheta(t) - 1}{2} t^{s/2-1}\, dt,\end{aligned}$$

wobei die Abschätzungen im Lemma gebraucht werden, um den Tausch der Summationsreihenfolge und der Integration zu rechtfertigen. Das zeigt, dass das Integral für $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert. Damit haben wir folgende Darstellung:

$$\zeta^*(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\vartheta(t)-1)t^{s/2-1}\,dt = \int_0^\infty \varphi(t)t^{s/2-1}\,dt.$$

Darin bezeichnet $\varphi(t) = \frac{1}{2}(\vartheta(t)-1)$. Die nächste Idee ist, dies mit Hilfe der Funktionalgleichung für $\vartheta(t)$ in eine Form zu bringen, der man ansieht, dass sie wohldefiniert ist für alle $s \in \mathbb{C}$ mit Ausnahme von $s = 1$. Speziell halten wir fest, dass die Funktionalgleichung ausgedrückt werden kann in der Form

$$\varphi(t) = t^{-1/2}\varphi(1/t) + \tfrac{1}{2}t^{-1/2} - \tfrac{1}{2}.$$

Deshalb können wir schreiben

$$\begin{aligned}\zeta^*(s) &= \int_0^1 \varphi(t)t^{s/2-1}\,dt + \int_1^\infty \varphi(t)t^{s/2-1}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(t^{-1/2}\varphi(1/t) + \tfrac{1}{2}t^{-1/2} - \tfrac{1}{2}\right)t^{s/2-1}\,dt + \int_1^\infty \varphi(t)t^{s/2-1}\,dt \\ &= -\frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(t^{-s/2-1/2} + t^{s/2-1}\right)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Wir haben eine Formel für $\zeta^*(s)$ hergeleitet (eine der Formeln, die im vorangehenden Hauptsatz behauptet werden), die - wie man sieht - jetzt eine meromorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Der Integrand nimmt stark ab für $t \to \infty$ und definiert tatsächlich eine ganze Funktion, so dass die einzigen Pole gleich $-1/s$ und $1/(s-1)$ sind. Wir haben deshalb bewiesen, dass $\zeta(s)$ analytisch zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzbar ist. □

Korollar 13. *Die Zeta-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s).$$

Wegen der Spiegelungsformel der Gamma-Funktion kann die Funktionalgleichung in äquivalenter Weise geschrieben werden als

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Beweis. Die für $\zeta^*(s)$ hergeleitete Darstellung ist offensichtlich symmetrisch bezüglich des Ersetzens von s mit $1-s$. □

Korollar 14. *Der einzige Pol von $\zeta(s)$ ist ein einfacher Pol an $s = 1$ mit Residuum $s = 1$.*

Beweis. Unsere Darstellung von $\zeta^*(s)$ stellt es dar als Summe von $-\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s-1}$ und einer ganzen Funktion. Deshalb sind die Pole von $\zeta^*(s)$ einfache Pole an $s = 0, 1$ mit den Residuen -1 bzw. 1. Daraus folgt, dass

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\Gamma(s/2)^{-1}\zeta^*(s)$$

einen Pol an $s = 1$ hat mit Residuum $\pi^{1/2}\Gamma(1/2)^{-1} = 1$, und einen Pol (der sich als hebbare Singularität entpuppt) an $s = 0$ mit Residuum $\pi^0\Gamma(0)^{-1} = 0$. (Das heißt, dass der Pol von $\zeta^*(s)$ an $s = 0$ entfernt wird durch die Nullstelle von $\Gamma(s/2)$.) □

Korollar 15. $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Beweis. Mit Hilfe der Funktionalgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= 2^{-n}\pi^{-n-1}\sin(-\pi n/2)\Gamma(n+1)\zeta(n+1)\\ &= 2^{-n}\pi^{-n-1}\sin(-\pi n/2)n!\zeta(n+1).\end{aligned}$$

Ist $n = 2k$ gerade, dann ist $\sin(-\pi n/2) = \sin(-\pi k) = 0$, wir erhalten also, dass $\zeta(-2k) = 0$ (d.h. $n = 2k$ ist eine der so genannten „trivialen Nullstellen"). Wir wissen schon, dass $B_{2k+1} = 0$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Also ist die Formel $\zeta(-n) = B_{n+1}/(n+1)$ in diesem Fall erfüllt.
Ist andererseits $n = 2k-1$ ungerade, dann ist $\sin(-\pi(2k-1)/2) = (-1)^k$, und deshalb erhalten wir mit Hilfe der Formel, die $\zeta(2k)$ mit den Bernoulli-Zahlen ausdrückt (die wurden in der Hausaufgabe bewiesen oder sind im Textbuch zu finden), dass

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= (-1)^k 2^{-2k+1}\pi^{-2k}(2k-1)!\zeta(2k)\\ &= (-1)^k 2^{-2k+1}\pi^{-2k}(2k-1)!\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}\\ &= -\frac{B_{2k}}{2k} = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Also ist auch in diesem Fall die Formel erfüllt. □

Korollar 16. *Die Nullstellen von* $\zeta(s)$ *im Gebiet* $\mathrm{Re}(s) < 0$ *sind genau die trivialen Nullstellen* $s = -2, -4, -6, \ldots$.

Beweis. Wir behaupteten bereits die Existenz der trivialen Nullstellen. Dass in diesem Gebiet keine weiteren Nullstellen existieren, folgt leicht aus der Funktionalgleichung. Der Beweis wird als Übung empfohlen. □

Bemerkung 12 (Alternative Wege zur analytischen Fortsetzung von $\zeta(s)$)**.** Es gibt eine näherliegende analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$, die auf der grundlegenden Idee besteht, ein Integral durch eine Summe zu approximieren - (oder in diesem Fall umgekehrt: eine Summe durch ein Integral). Die technische Bezeichnung für diese Vorgehensweise ist - falls man das systematisch anwendet – **Euler-Maclaurin-Summation**.

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s} + \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s}\right)\right)\\ &= \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)dx\\ &= \frac{1}{s-1} - \int_1^{\infty}(x^{-s} - \lfloor x\rfloor^{-s})\,dx.\end{aligned}$$

Diese Darstellung ist sicher richtig für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Wir erinnern uns aber an die Schranke (geliefert vom Mittelwertsatz)

$$|x^{-s} - \lfloor x\rfloor^{-s}| \le |s|\cdot\lfloor x\rfloor^{-\mathrm{Re}(s)-1} \qquad (x \ge 1).$$

Das Integral ist also tatsächlich ein absolut konvergentes Integral im größeren Gebiet $\mathrm{Re}(s) > 0$, und die von uns hergeleitete Darstellung liefert eine analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ zu einer

meromorphen Funktion auf $\mathrm{Re}(s) > 0$ mit einem einzelnen Pol an $s = 1$ (ein einfacher Pol mit Residuum 1), die sonst überall holomorph ist.

Eine Ausarbeitung dieser Idee ist, mit Hilfe der bekannten Summations-Formel von Euler-Maclaurin $\zeta(s)$ zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortzusetzen, indem man sie induktiv von einem Gebiet $\mathrm{Re}(s) > -n$ auf ein Gebiet $\mathrm{Re}(s) > -n-1$ ausdehnt – so wie wir das bei der Gamma-Funktion vorgeführt haben. Eine andere Herangehensweise ist, die vorangehend gezeigte analytische Fortsetzung für $\mathrm{Re}(s) > 0$ zu nutzen, dann die Funktionalgleichung $\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s)$ im Gebiet $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ zu beweisen, und dann die Funktionalgleichung zu benutzen, um $\zeta(s)$ fortzusetzen auf $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ (was die Spiegeluung des Gebiets $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ unter der Transformation $s \mapsto 1-s$ ist).

15.2 Ein Nullstellensatz der Riemannschen Zeta-Funktion

Als nächstes beweisen wir eine nicht triviale und sehr wichtige Tatsache über die Zeta-Funktion, welche die entscheidende Rolle in unserem Beweis des Primzahlsatzes spielen wird.

Satz 36. *$\zeta(s)$ hat keine Nullstellen auf der Geraden* $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Diesen Satz kann man sich vorstellen als „Spielzeug“-Version der Riemannschen Vemutung. Falls Sie jemals versuchen wollen, das Problem zu lösen - die Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen - dann ist vielleicht das Verständnis der „Spielzeug-Version“ ein guter Einstieg ...

Beweis. Für den Beweis bezeichne $s = \sigma + it$, wobei wir annehmen, dass $\sigma > 1$ und dass $t \neq 0$ reell ist . Der Beweis beruht darauf, gleichzeitig das Verhältnis von $\zeta(\sigma+it)$, $\zeta(\sigma+2it)$, und $\zeta(\sigma)$ zu untersuchen, und zwar für fixes t und für $\sigma \searrow 1$. Betrachte die folgende mysteriöse Größe

$$X = \log|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)|.$$

Wir können „X“ darstellen als

$$\begin{aligned}
&\log|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| \\
&\quad = 3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| \\
&\quad = 3\log\left(\prod_p |1-p^{-\sigma}|^{-1}\right) + 4\log\left(\prod_p |1-p^{-\sigma-it}|^{-1}\right) \\
&\qquad\quad + \log\left(\prod_p |1-p^{-\sigma-2it}|^{-1}\right) \\
&\quad = \sum_p \Big(-3\log|1-p^{-\sigma}| - 4\log|1-p^{-\sigma-it}| - \log|1-p^{-\sigma-2it}| \Big) \\
&\quad = \sum_p \Big(-3\,\mathrm{Re}\Big[\mathrm{Log}(1-p^{-\sigma})\Big] - 4\,\mathrm{Re}\Big[\mathrm{Log}(1-p^{-\sigma-it})\Big] \\
&\qquad\qquad - \mathrm{Re}\,\mathrm{Log}\Big[1-p^{-\sigma-2it}\Big]\Big),
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Log}(\cdot)$ den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Beachte nun, dass für $z = a+ib$ mit $a > 1$ und einer Primzahl p gilt $|p^{-z}| = p^{-a} < 1$, also

$$-\mathrm{Log}(1-p^{-z}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-mz}}{m}$$

und

$$-\operatorname{Re}\Big[\operatorname{Log}(1-p^{-z})\Big] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ma}}{m} \operatorname{Re}\Big[\cos(mb\log p) + i\sin(mb\log p)\Big]$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ma}}{m} \cos(mb\log p).$$

Wir können also X auch schreiben als

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma}(3 + 4\cos\theta_n + \cos(2\theta_n))$$

wobei $\theta_n = t\log n$ und $c_n = 1/m$, falls $n = p^m$ für eine Primzahl p. Nun können wir die einfache trigonometrische Identität

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1+\cos\theta)^2$$

nutzen und X nochmal umschreiben in

$$X = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma}(1+\cos\theta_n)^2.$$

Wir haben eine entscheidende Tatsache bewiesen, nämlich dass $X \geq 0$ oder äquivalent dazu, dass

$$e^X = |\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Wir behaupten nun, dass diese harmlos aussehende Ungleichung inkompatibel ist mit der Existenz einer Nullstelle von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$. Nehmen wir - für einen Widerspruchsbeweis - an, dass $\zeta(1+it) = 0$ für ein reelles $t \neq 0$. Dann haben die drei Größen $\zeta(\sigma)$, $\zeta(\sigma+it)$ und $\zeta(\sigma+2it)$ für $\sigma \searrow 1$ das folgende asymptotische Verhalten:

$$|\zeta(\sigma)| = \frac{1}{\sigma-1} + O(1) \quad (\text{da } \zeta(s) \text{ einen Pol an } s=1 \text{ hat}),$$
$$|\zeta(\sigma+it)| = O(\sigma-1) \quad (\text{da } \zeta(s) \text{ eine Nullstelle an } s = 1+it \text{ hat}),$$
$$|\zeta(\sigma+2it)| = O(1) \quad \text{da } \zeta(s) \text{ holomorph ist an } s = 1+2it).$$

Wie kombinieren diese drei Aussagen und erhalten

$$e^X = |\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| = O((\sigma-1)^{-3}(\sigma-1)^4) = O(\sigma-1).$$

Insbesondere geht $e^X \to 0$ für $\sigma \searrow 1$, im Widerspruch zur vorangehend bewiesenen Aussage, dass $e^X \geq 1$. Das beweist die Behauptung, dass $\zeta(s)$ keine Nullstelle mit $\operatorname{Re}(s) = 1$ hat. □

Übung 16. Der vorangehende Beweis, dass $e^X \geq 1$ (was sofort die Behauptung des Satzes implizierte), beruht darauf, zu zeigen, dass für jede Primzahl p die entsprechenden Faktoren in der Eulerschen Produktformel folgende Ungleichung erfüllen:

$$(1-p^{-\sigma})^{-3}|1-p^{-\sigma}p^{-it}|^{-4}|1-p^{-\sigma}p^{-2it}|^{-1} \geq 1.$$

Das wurde bewiesen durch Logarithmieren auf beiden Seiten, durch Potenzreihenentwicklung und durch Nutzung der elementaren triginometrischen Identität $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+$

$\cos\theta)^2$. Allerdings ist eine direktere Herangehensweise vorstellbar: Es sei $x = p^{-\sigma}$ und $z = p^{-it} = e^{-it\log p}$. Dann reduziert sich die Ungleichung auf die Behauptung, dass

$$(1-x)^3|1-zx|^4|1-z^2x| \leq 1$$

für alle $x \in [0,1]$ und z mit $|z| = 1$. Da das eine elementare Ungleichung ist, könnte es für sie einen einfachen Beweis geben (d.h. einen Beweis ohne Logarithmen und ohne Potenzreihenentwicklung). Können Sie diesen Beweis finden?

16 Der Primzahlsatz

Der Primzahlsatz wurde 1896 unabhängig voneinander durch Jacques Hadamard und von Charles Jean de la Vallée Poussin bewiesen, mit Hilfe der bahnbrechenden Ideen aus Riemann's berühmtem 1859-Papier, in dem er die Riemannsche Zeta-Funktion als Werkzeug zum Zählen von Primzahlen einführte. (Das war das einzige Papier zur Zahlentheorie, das Riemann jemals schrieb!!) Die Geschichte aller dieser Entwicklungen (inklusive aller technischen Details) wird sehr gut beschrieben in dem klassischen Lehrbuch [4], das ich sehr empfehle.

Die originalen Beweise des Primzahlsatzes waren sehr kompliziert und beruhten auf der „expliziten Formel der Zahlentheorie" (welche ich im letzten Abschnitt erwähnte) und einigen ihrer Varianten. Während des 20. Jahrhunderts arbeiteten Mathematiker hart daran, einfachere Zugänge zur Herleitung des Primzahlsatzes zu finden. Daraus resultierten einige wichtige Entwickungen (wie z.B. der Satz von Wiener-Tauber und der Satz von Hardy-Littlewood), welche nicht nur die analytische Zahlentheorie bereicherten, sondern auch die Funktionentheorie, die harmonische Analysis und die Funktionalanalysis. Trotz aller Anstrengungen und der Entdeckung einiger Beweiszugänge, die einfacher zu sein scheinen als die originalen, blieben alle Beweise sehr schwierig ...bis zum Jahr 1980, als der Mathematiker Donald Newman einen wunderbar einfachen Weg fand, den Satz herzuleiten - und zwar mit vollständig elementarer Funktionentheorie. Der Beweis, den ich hier präsentiere, ist Newnman's Beweis (so wie er präsentiert wird in dem kurzen Papier [13] von D. Zagier).

Definiere die gewichteten Primzahl-Zählfunktionen

$$\pi(x) = \#\{p \text{ prime} : p \leq x\} = \sum_{p \leq x} 1,$$

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} \log p \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor,$$

Wir vereinbaren, dass das Symbol p in der Summation eine Primzahl bedeutet und dass p^k eine Primzahlpotenz bezeichnet, d.h. $\leq x$ und die Summation über p^k bezeichnet die Summation über alle Primzahlpotenzen $\leq x$. Weiter ist es auch üblich, die Funktion $\psi(x)$ zu schreiben als

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

wobei die Funktion $\Lambda(n)$, welche als **von Mangoldt-Funktion** bezeichnet wird, und als „Lambda" ausgesprochen wird, definiert ist als

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^k,\ p \text{ Primzahl}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 11. *Der Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ist äquivalent zur Aussage, dass $\psi(x) \sim x$.*

Beweis. Wir benutzen die Ungleichung

$$\psi(x) = \sum_{p \le x} \log p \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \le \sum_{p \le x} \log p \frac{\log x}{\log p} = \sum_{p \le x} \log x = \log x \cdot \pi(x).$$

In umgekehrter Richtung gilt eine ähnliche (aber etwas weniger elegante) Ungleichung, nämlich dass für jedes $0 < \epsilon < 1$ und $x \ge 2$,

$$\begin{aligned}\psi(x) &\ge \sum_{p \le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\epsilon} < p \le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\epsilon} < p \le x} \log\left(x^{1-\epsilon}\right) \\ &= (1-\epsilon)\log x\Big(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})\Big) \ge (1-\epsilon)\log x\Big(\pi(x) - x^{1-\epsilon}\Big).\end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass $\psi(x) \sim x$ für $x \to \infty$. Dann folgt aus der ersten der vorangehenden Schranken, dass

$$\pi(x) \ge \frac{\psi(x)}{\log x},$$

also folgt

$$\liminf_{x\to\infty} \pi(x) / \left(\frac{x}{\log x}\right) \ge 1.$$

Andererseits folgt aus der zweiten Schranke, dass

$$\pi(x) \le \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\psi(x)}{\log x} + x^{1-\epsilon},$$

und das impliziert, dass $\limsup_{x\to\infty} \pi(x)/\left(\frac{x}{\log x}\right) \le \frac{1}{1-\epsilon} + \limsup_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}$. Da ϵ eine beliebige Zahl aus $(0,1)$ war, folgt, dass

$$\limsup_{x\to\infty} \pi(x) / \left(\frac{x}{\log x}\right) \le 1.$$

Kombiniert man nun die Aussagen über **lim inf** und **lim sup** , dann folgt, dass $\pi(x) \sim x/\log x$. Wir nehmen nun an, dass $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ und wenden die Ungleichungen von vorhin in umgekehrter Richtung an. Dann haben wir

$$\psi(x) \le \log x \cdot \pi(x),$$

also

$$\limsup_{x\to\infty} \psi(x)/x \le 1.$$

Andererseits impliziert

$$\psi(x) \ge (1-\epsilon)\log x(\pi(x) - x^{1-\epsilon}),$$

dass

$$\liminf_{x\to\infty} \psi(x)/x \ge \lim_{x\to\infty} (1-\epsilon)\left(1 - \frac{\log x}{x^\epsilon}\right) = 1 - \epsilon.$$

Da wieder $\epsilon \in (0,1)$ beliebig war, folgt $\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. Kombiniert man wieder die Erkenntnisse zu **lim inf** und **lim sup**, dann erhält man $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ – wie behauptet. □

Lemma 12. *Für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gilt*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

Beweis. Mit Hilfe der Eulerschen Produktformel und der logarithmischen Ableitung (welche als Operation angewandt auf unendliche Produkte holomorpher Funktionen, welche gleichmäßig auf kompakten Teilmengen konvergieren, erwartungsgemäß arbeitet) erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \frac{\frac{d}{ds}(1-p^{-s})}{1-p^{-s}} = \sum_p \frac{\log p \cdot p^{-s}}{1-p^{-s}} \\
&= \sum_p \log p \,(p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \ldots) = \sum_{p \text{ prime}} \sum_{k=1}^{\infty} \log p \cdot p^{-ks} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 13. *Es gibt eine Konstante* $C > 0$, *so dass* $\psi(x) < Cx$ *für alle* $x \geq 1$.

Beweis. Die Beweisidee ist, dass der Binomialkoeffizient $\binom{2n}{n}$ einerseits nicht zu groß, aber andererseits durch viele Primzahlen teilbar ist, (alle Primzahlen zwischen n und $2n$) — also folgt, dass es nicht allzu viele Primzahlen sein können, und insbesondere kann die gewichtete Primzahl-Zählfunktion $\psi(x)$ mit Hilfe einer solchen Argumentation leicht nach oben beschränkt werden. Speziell haben wir

$$\begin{aligned}
2^{2n} = (1+1)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} > \binom{2n}{n} \geq \prod_{n<p\leq 2n} p = \exp\left(\sum_{n<p\leq 2n} \log p \right) \\
&= \exp\Big(\psi(2n) - \psi(n) - \sum_{n<p^k\leq 2n,\ k>1} \log p \Big). \\
&\geq \exp\Big(\psi(2n) - \psi(n) - O(\sqrt{n}\log^2 n) \Big).
\end{aligned}$$

(Die Abschätzung $O(\sqrt{n}\log^2 n)$ für die Summe von $\log p$ Primzahlpotenzen größer als 1 ist einfach und wird als Übung empfohlen.) Nimmt man auf beiden Seiten den Logarithmus, dann erhält man die Schranke

$$\psi(2n) - \psi(n) \leq 2n \log 2 + C_1 \sqrt{n} \log n \leq C_2 n.$$

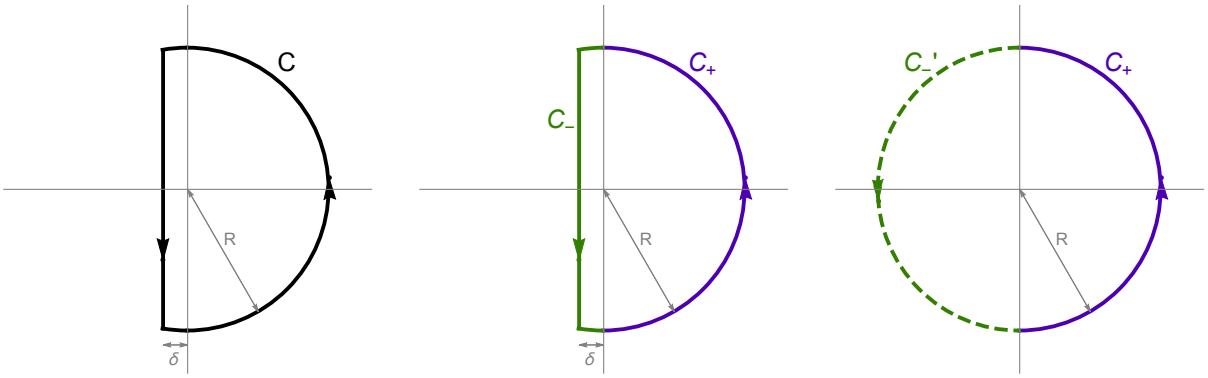
Sie ist gültig für alle $n \geq 1$ mit einer Konstanten $C_2 > 0$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\psi(2^m) &= (\psi(2^m) - \psi(2^{m-1})) \\
&\qquad + (\psi(2^{m-1}) - \psi(2^{m-2})) + \ldots + (\psi(2^1) - \psi(2^0)) \\
&\leq C_2(2^{m-1} + \ldots + 2^0) \leq C_2 2^m.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\psi(x) \leq C_2 x$ ist also erfüllt für $x = 2^m$. Nun sieht man leicht, dass dies die Aussage für alle x impliziert, da für $x = 2^m + \ell$ mit $0 \leq \ell < 2^m$ gilt

$$\psi(x) = \psi(2^m + \ell) \leq \psi(2^{m+1}) \leq C_2 2^{m+1} \leq 2C_2 2^m \leq 2C_2 x.$$

□



(a) (b) (c)

Abbildung 6: Kurven C, C_+, C_- and C'_-.

Satz 37 (Newman's Tauber-Satz)**.** *Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf kompakten Intervallen integrierbar ist. Definiere eine Funktion $g(z)$ einer komplexen Variablen z durch*

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

*(g ist bekannt als **Laplace-Transformation** von f). Natürlich ist $g(z)$ definiert und holomorph in der offenen Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$. Wir nehmen an, dass $g(z)$ eine analytische Fortsetzung hat auf ein offenes Gebiet Ω, welches die* abgeschlossene *Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ enthält. Dann existiert $\int_0^\infty f(t)\,dt$ und ist gleich $g(0)$ (dem Wert an $z = 0$ der analytischen Fortsetzung von g).*

Beweis. Wir definieren eine „abgeschnittene (truncated)" Version des Integrals, das $g(z)$ definiert, nämlich

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt$$

für $T > 0$. Diese ist für jedes T eine ganze Funktion von z. Wir haben das Ziel zu zeigen, dass $\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$. Das erreichen wir durch eine schlaue Anwendung der Cauchyschen Integralformel. Fixiere ein großes $R > 0$ und ein kleines $\delta > 0$ (das von R abhängt auf eine Art, die wir gleich erklären). Nun betrachten wir die Kurve C, welche besteht aus dem Teil des Kreises $|z| = R$, der in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$liegt, zusammen mit dem Geradensegment $\mathrm{Re}(z) = -\delta$, das die oberen und unteren Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden verbindet (siehe Fig. 6(a)). Sei nun δ so klein, dass $g(z)$ (das analytisch mindestens etwas nach rechts von $\mathrm{Re}(z) = 0$ fortsetzbar ist) holomorph ist in einer offenen Menge, die C enthält und die von C eingeschlossene Menge. Dann gilt nach Cauchy's Integralformel

$$\begin{aligned} g(0) - g_T(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C (g(z) - g_T(z))e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_+} + \int_{C_-}\right)(g(z) - g_T(z))e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

wobei wir die Kurve in zwei Teile spalten, einen Halbkreis-Bogen C_+, der in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$ liegt, und in den verbleibenden Teil C_- in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) < 0$ (Abb. 6(b)). Nun suchen wir Integralabschätzungen separat für C_+ und für C_-. Als erstes haben wir für z auf C_+

$$|g(z) - g_T(z)| = \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\,dt\right| \leq B\int_T^\infty |e^{-zt}|\,dt = \frac{Be^{-\mathrm{Re}(z)T}}{\mathrm{Re}(z)},$$

wobei $B = \sup_{t\geq 0} |f(t)|$, und

$$\left| e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\right| = e^{\mathrm{Re}(z)T}\,\frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{R}$$

(aufgrund der trivialen Identität $|1+e^{it}|^2 = |e^{it}(e^{it}+e^{it})|^2 = 2\cos(t)$, die für $t \in \mathbb{R}$ gilt). Wir kombinieren und finden

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}(g(z)-g_T(z))e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq (\pi R)\frac{2B}{2\pi R^2} = \frac{B}{R}.$$

Nun zu C_-: Wir finden Schranken für das Integral, indem wir die Beiträge von $g(z)$ und $g_T(z)$ separat abschätzen. Im Falle von $g_T(z)$ist die Funktion ganz, wir können also die Kurve deformieren, insbesondere sie ersetzen durch den Halbkreis-Bogen $C'_- = \{|z| = R, \mathrm{Re}(z) < 0\}$ (Abb. 6(c)). Auf dieser Randkurve haben wir

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt\right| \leq B\int_{-\infty}^{T}|e^{-zt}|\,dt = \frac{Be^{-\mathrm{Re}(z)T}}{|\mathrm{Re}(z)|}.$$

Mit eine r ähnlichen Rechnung wie vorangehend kommen wir damit zur Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_-}\left|g_T(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\right|\frac{|dz|}{|z|} \leq \frac{B}{R}.$$

Das verbleibende Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}\left|g(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\right|\frac{|dz|}{|z|}$$

geht gegen 0 für $T\to\infty$, da die Abhängigkeit von T nur im Faktor e^{Tz} besteht, der für $T\to\infty$ auf kompakten Teilmengen von $\mathrm{Re}(z) < 0$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Kombinieren wir nun unsere bisherigen Abschätzungen, dann haben wir gezeigt, dass

$$\limsup_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)| \leq \frac{2B}{R}.$$

Da R eine beliebige positive Zahl war, muss lim sup gleich 0 sein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Betrachte nun eine sehr spezielle Anwendung von Newman's Satz: Nimm als $f(t)$ die Funktion

$$f(t) = \psi(e^t)e^{-t} - 1 \qquad (t \geq 0).$$

Diese Funktion ist nach dem vorangehend bewiesenen Lemma beschränkt. Die zugeordnete Funktion $g(z)$ ist dann

$$\begin{aligned}
g(z) &= \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t}-1)e^{-zt}\,dt = \int_1^\infty\left(\frac{\psi(x)}{x}-1\right)x^{-z-1}\,dx\\
&= \int_1^\infty \psi(x)x^{-z-2}\,dx - \frac{1}{z} = \int_1^\infty\left(\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\right)x^{-z-2}\,dx - \frac{1}{z}\\
&= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n)\left(\int_n^\infty x^{-z-2}\,dx\right) - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n)\,\frac{x^{-z-1}}{-z-1}\bigg|_n^\infty - \frac{1}{z}\\
&= \frac{1}{z+1}\sum_{n=1}^\infty \Lambda(n)n^{-z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z+1}\cdot\frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)} - \frac{1}{z} \qquad (\mathrm{Re}(z) > 0).
\end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ einen einfachen Pol hat an $s = 1$ mit Residuum 1 (da $\zeta(s)$ einen einfachen Pol hat an $s = 1$; nützlich ist, sich zu erinnern an die allgemeinere Tatsache, dass für eine holomorphe Funktion $h(z)$ mit einer Nullstelle der Ordnung k an $z = z_0$ die logarithmische Ableitung $h'(z)/h(z)$ einen einfachen Pol hat an $z = z_0$ mit Residuum k). Also hat $-\frac{1}{z+1} \cdot \frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)}$ einen einfachen Pol mit Residuum 1 an $z = 0$ und deshalb hat $-\frac{1}{z+1} \cdot \frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)} - \frac{1}{z}$ eine *hebbare* Singularität an $z = 0$. Also folgt aus der Identität $g(z) = -\frac{1}{z+1} \cdot \frac{\zeta'(z+1)}{\zeta(z+1)} - \frac{1}{z}$, dass $g(z)$ analytisch fortsetzbar ist zu einer holomorphen Funktion auf der Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : \zeta(z+1) \neq 0\}.$$

Aufgrund von Riemann's „Spielzeug-Hypothese" — in der wir bewiesen haben, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$ hat, lässt sich $g(z)$ insbesondere fortsetzen auf eine offene Menge, welche die Halbebene $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ enthält. Also erfüllt $f(t)$ die Annahmen von Newman's Satz. Aus dem Satz folgern wir, dass das Integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\,dt &= \int_0^\infty (\psi(e^t)e^{-t} - 1)dt = \int_1^\infty \left(\frac{\psi(x)}{x} - 1\right)\frac{dx}{x} \\ &= \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

konvergiert.

Beweis. [Beweis des Primzahlsatzes] Wir werden beweisen, dass $\psi(x) \sim x$. . Das ist - wie wir schon zeigten - äquivalent zum Primzahlsatz. Wir wollen einen Widerspruchsbeweis führen und nehmen daher an, dass $\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} > 1$ oder $\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} < 1$. Im ersten Fall bedeutet das, dass eine Zahl $\lambda > 1$ existiert, so dass $\psi(x) \geq \lambda x$ für beliebig große x. Für solche Werte von x folgt dann, dass

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\psi(t) - t}{t^2}\,dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\,dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - t}{t^2}\,dt =: A > 0.$$

Das aber widerspricht der Tatsache, dass das Integral $\int_1^\infty (\psi(x) - x)x^{-2}\,dx$ konvergiert.

Nun sei $\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} < 1$. Das bedeutet, dass $\mu < 1$ existiert, so dass $\psi(x) \leq \mu x$ für beliebig große x. In diesem Fall haben wir dann, dass

$$\int_{\lambda x}^x \frac{\psi(t) - t}{t^2}\,dt \leq \int_{\lambda x}^x \frac{\lambda x - t}{t^2}\,dt = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - t}{t^2}\,dt =: B < 0.$$

Auch das ist ein Widerspruch zur Konvergenz des Integrals. □

17 Einführung in die asymptotische Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir lernen, wie man Funktionentheorie nutzen kann, um asymptotische Formeln zu beweisen, z.B.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{(Stirling's Formel)}, \tag{2}$$

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}} \qquad \text{(Hardy-Ramanujan Formel)}, \tag{3}$$

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad \text{(Airy Funktion)}, \tag{4}$$

und so weiter. Im Mittelpunkt vieler solcher Abschätzungen steht eine wichtige Technik, welche bekannt ist als **Sattelpunkt-Methode**. Einge verwandte Techniken (sie sind alle kleinere Varianten desselben Themas) sind die **Laplace-Methode**, die **Methode des schnellsten Abstiegs** und die Methode der **stationären Phase**.

17.1 Beispiel 1: Stirling's Formel

In diesem Abschnitt wollen wir eine Version von Sterling's Formel (2) für die Fakultäts-Funktion $n!$ beweisen. Fangen wir scheinbar ziellos etwas spaßig damit an, uns zu fragen, was wir ganz einfach über die Größe von $n!$ für große n sagen können.[3] Eine offenbar obere Schranke ist n^n, denn $n! \leq n^n$. Für eine untere Schranke gilt ähnlich Triviales wie zum Beispiel, dass $n! \geq (n/2)^{n/2}$, das ist aber weit weg von der oberen Schranke. Das können wir etwas besser, indem wir beobachten, dass wir für jede reelle Zahl $x > 0$ die Ungleichungen

$$\frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

haben, und das liefert sofort die untere Schranke

$$n! \geq e^{-x} x^n.$$

Es macht nun Sinn zu versuchen, die beste untere Schranke zu erhalten, indem man die x sucht, für welche die Funktion der unteren Schranken maximal wird. Das ist der Fall für

$$0 = \frac{d}{dx}(e^{-x}x^n) = e^{-x}\left(-x^n + nx^{n-1}\right) = e^{-x}x^{n-1}(-x+n),$$

d.h., für $x = n$. Steckt man diesen Wert in die Ungleichung, dann ergibt das die untere Schranke

$$n! \geq (n/e)^n \qquad (n \geq 1).$$

Das ist natürlich ein sehr einfaches Standardergebnis - es ist aber verblüffend, dass uns das sehr nah zur „wahren" asymptotischen Abschätzung von (2) führt. Das Entscheidende an dieser sehr einfachen Rechnung ist - wie wir sehen werden - dass am Wert $x = n$, der bei der Maximierung herauskam, etwas sehr speziell ist. Interpretiert man das im Kontext „Funktionentheorie", dann entspricht dieser Wert einem sogenannten „Sattelpunkt", da er ein lokales Minimum von e^x/x^n ist, wenn man sich entlang der reellen Achse bewegt; er ist aber ein lokales Maximum, wenn man sich dazu orthogonal bewegt entlang der imaginären Achse. Unser triviales Vorgehen hat als eine tieferen, viel mächtigeren Kern enthüllt.

Folgen wir nun dem mächtigeren Zugang. Unser „spielerisches" Vorgehen basierte nur auf reeller Analysis: Wir benutzten die Taylorentwicklung der Funktion $x \mapsto e^x$; es stellt sich heraus, dass wir hier mit komplex analytischen Gedanken weiter kommen. Wir beginnen mit der Potenzreihenentwicklung

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

[3] Eine allgemeine Regel für das Lösen von Problemen ist oft, das Problemlösen damit zu beginnen, einfache Dinge zur Problemstellung zu sagen, bevor man das Problem mit fortgeschritteneren Methoden angeht. Das beflügelt die Intuition und manchmal sieht man, dass die einfachen Techniken schon das Problem lösen.

Aus dem Studium des Cauchyschen Integralsatzes und des Residuensatzes wissen wir sehr genau, dass der n-te Taylorkoeffizient durch Randkurven-Integration aus der Funktion gezogen werden kann, d.h. wir können schreiben

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz,$$

wobei der Radius r des als Randkurve gewählten Kreises eine beliebige gewählte Zahl ist. Es stellt sich heraus, dass einige Werte von r besser sind als andere, wenn man eine asymptotische Näherung versucht. Wir wählen $r = n$ (Ich werde später erklären, woher diese offenbar „inspirierte“ Wahl kommt) und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=n} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(ne^{it}\right) n^{-n} e^{-int}\, i\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi\, n^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(n(e^{it} - it)\right) dt \\ &= \frac{e^n}{2\pi\, n^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(n(e^{it} - 1 - it)\right) dt,\end{aligned}$$

wobei wir den Integranden „strategisch massiert“ haben (indem wir den Faktor e^n herausgezogen haben), um einen Term in der Taylorentwicklung von e^{it} entfernen zu können, zusätzlich zu einem Term, der schon weggefallen ist. Aus praktischen Gründen schreiben wir das anders und zwar als

$$\frac{n^n}{e^n n!} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(n(e^{it} - 1 - it)\right) dt.$$

Nun betrachten wir

$$n\left(e^{it} - 1 - it\right) = -\frac{nt^2}{2} + O(nt^3) = \frac{(\sqrt{n}t)^2}{2} + O\left(\frac{(\sqrt{n}t)^3}{\sqrt{n}}\right)$$

für kleine $|t|$ und sehen, dass ein Variablenwechsel $u = \sqrt{n}t$ im Integral uns in die Lage versetzen wird, das wieder anders zu schreiben, nämlich als

$$n\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{u^2}{2} + O\left(\frac{u^3}{\sqrt{n}}\right).$$

Führen wir den Variablenwechsel durch und führen wir einen Faktor $\sqrt{n}$ auf der linken Seite ein, dann wird das Integral zu

$$\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n n!} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \exp\left(n\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}\right)\right) du.$$

Der Integrand konvergiert punktweise gegen $e^{-u^2/2}$ (für fixes u und $n \to \infty$), es ist also sinnvoll anzunehmen, dass das Integral gegen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{2\pi}$ konvergieren wird, und das würde zur Formel

$$\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n n!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

führen.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

Das ist genau Stirling's Formel. Bedenke aber, dass die $O(u^3/\sqrt{n})$ Abschätzung gilt, wenn $t = u/\sqrt{n}$ in einer Umgebung von 0 liegt, und da u in Wirklichkeit in $[-\pi\sqrt{n}, \pi\sqrt{n}]$ liegt, müssen

wir bei der Herleitung einer asymptotischen Formel sorgfältiger sein. Dazu macht es Sinn, das Integral in zwei Teile zu spalten.Es bezeichne $M = n^{1/10}$ und es sei

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \exp\left(n\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}\right)\right) du = I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_{-M}^{M} \exp\left(n\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}\right)\right) du, \\ I_2 &= \int_{[-\pi\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]\setminus[-M,M]} \exp\left(n\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}\right)\right) du. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun I_1 und I_2 getrennt ab. Für I_1 haben wir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-M}^{M} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + O\left(\frac{u^3}{\sqrt{n}}\right)\right) du \\ &= \int_{-M}^{M} e^{-u^2/2} \exp\left(O\left(\frac{u^3}{\sqrt{n}}\right)\right) du \\ &= \int_{-M}^{M} \left(1 + O\left(\frac{u^3}{\sqrt{n}}\right)\right) e^{-u^2/2} du = \left(1 + O(n^{-1/5})\right) \int_{-M}^{M} e^{-u^2/2} du \\ &= \left(1 + O(n^{-1/5})\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{M}^{\infty}\right) e^{-u^2/2} du \\ &= \left(1 + O(n^{-1/5})\right)\left(\sqrt{2\pi} - O\left(\exp\left(-n^{-1/5}\right)\right)\right) \\ &= \left(1 + O(n^{-1/5})\right)\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Für I_2 haben wir

$$\begin{aligned} |I_2| &\le 2\int_{M}^{\pi\sqrt{n}} \left|\exp\left(n\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1 - \frac{iu}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| du \\ &= 2\int_{M}^{\pi\sqrt{n}} \exp\left(n\,\mathrm{Re}\left(e^{iu/\sqrt{n}} - 1\right)\right) du \\ &= 2\int_{M}^{\pi\sqrt{n}} \exp\left[n\left(\cos\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right] du \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die elementare Tatsache, dass $\cos(t) \le 1 - t^2/8$ für $x \in [-\pi, \pi]$ (siehe Abb. 7) um weiter herzuleiten, dass

$$|I_2| \le 2\int_{M}^{\pi\sqrt{n}} \exp\left(-u^2/8\right) du \le 2\pi\sqrt{n}\exp\left(-n^{1/5}\right) = O(n^{-1/5}).$$

Kombiniert man diese Zwischenergebnisse, dann haben wir folgende Version von Stirling's Formel mit einer tatsächlichen (allerdings suboptimalen) Größe bewiesen:

Satz 38 (Stirling's Approximation für $n!$)**.** *Die asymptotische Beziehung*

$$n! = \left(1 + O(n^{-1/5})\right)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

gilt für $n \to \infty$.

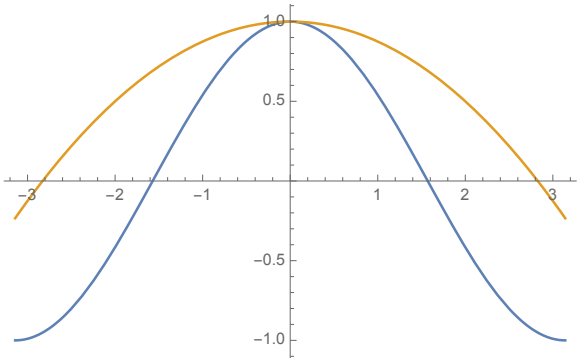


Abbildung 7: Illustration der Ungleichung $\cos(t) \le 1 - t^2/8$.

17.2 Beispiel 2: Der zentrale Binomialkoeffizient

Es sei $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Der übliche Weg, eine asmyptotische Darstellung für a_n für $n \to \infty$ zu finden, nutzt die Stirling'sche Formel. Das ergibt leicht, dass

$$\binom{2n}{n} = (1 + o(1))\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

(Beachte, dass das nicht allzu weit entfernt ist von der trivialen oberen Schranke $\binom{2n}{n} \le (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.) Es ist lehrreich dieses Ergebnis nochmals mit der Sattelpunkt-Methode herzuleiten. Wir starten mit der Entwicklung

$$(1+z)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^n.$$

Aus ihr folgt die Kurvenintegral-Darstellung

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz.$$

Mit derselben trivialen Methode der Herleitung oberer Schranken, die wir im Falle der Taylorkoeffizienten $1/n!$ der Funktion e^z benutzten , haben wir für jedes $x > 0$

$$\binom{2n}{n} \le (1+x)^{2n}/x^n = \exp\left(\log(1+x) - n\log x\right).$$

Wir optimieren über x, indem wir den Ausdruck $\log(1+x) - n\log x$ innerhalb des Exponenten differenzieren und setzen die Ableitung gleich 0. Das ergibt $x = 1$ – da liegt der Sattelpunkt. Für diesen Wert von x, gewinnen wir wieder die triviale Ungleichung $\binom{2n}{n} \le 2^{2n}$.

Da wir nun den Sattelpunkt kennen, setzen wir als nächstes $r = 1$ in der Kurvenintegral-Formel und erhalten

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+e^{it})^{2n} e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\Big(n\Big(2\log(1+e^{it}) - t\Big)\Big) dt.\end{aligned}$$

Beachte nun, dass der Ausdruck im Exponenten folgende Taylorentwicklung hat:

$$n(2\log(1+e^{it})-t) = 2\log 2 - \frac{1}{4}nt^2 + O(nt^4) \qquad \text{as } t \to 0.$$

Wieder sehen wir, dass der Variablenwechsel $u = t/\sqrt{n}$ in einen asymptotisch skalenfreien Zustand bringt. Präziser haben wir

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(n\left(2\log 2 - \frac{1}{4}nt^2 + O(nt^4)\right)\right) dt \\ &= \frac{4^n}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}u^2 + O\left(\frac{u^4}{n}\right)\right) du.\end{aligned}$$

Es ist nun naheliegend, zu erraten, dass im Grenzwert für $n \to \infty$ sich die punktweise Konvergenz der Integranden in einen Grenzwert der Integrale übersetzt, so dass wir die Approximation

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4}\, du = \frac{4^n}{2\pi\sqrt{n}} 2\sqrt{\pi} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

erhalten – wie gefordert. Das stimmt tatsächlich, aber wir müssen das noch präzisieren, indem wir das Integral in zwei Teile zerlegen, einen „zentralen“ Teil, in dem gezeigt werden kann, dass der $O(u^4/n)$-Fehlerterm klein ist, und einen davon getrennten Teil, der mit einer Schranke abzuschätzen ist.

Übung 17. Vervollständigen Sie diese Analyse und geben Sie einen genauen Beweis mit Hilfe der asymptotischen Formel $\binom{2n}{n} = (1+o(1))4^n/\sqrt{\pi n}$.

Übung 18. Wiederholen Sie diese Analyse für die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zentraler „Trinomialkoeffizienten“, wobei b_n als der Koeffizient von x^n definiert ist in der Entwicklung $(1+x+x^2)^n$. Diese Definition führt unmittelbar zur Kurvenintegral-Darstellung

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{(1+z+z^2)^n}{z^{n+1}}\, dz.$$

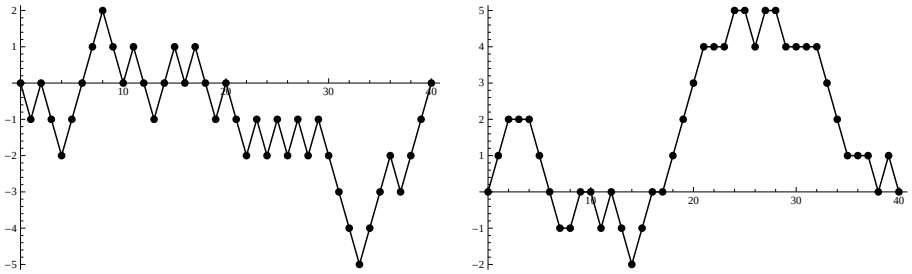
Ähnlich wie ihre berühmteren Verwandten, die Binomialkoeffizienten, sind diese Koeffizienten wichtig in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitststheorie. Speziell entsprechen a_n and b_n der Anzahl der Zufallswege $\mathbb{Z}$, die bei 0 starten und enden und n Schritte haben. Im Falle der zentralen Binomialkoeffizienten sind die erlaubten Schritte gleich -1 oder $+1$. Im Falle der zentralen Trinomialkoeffizienten sind die erlaubten Schritte gleich -1, 0 oder 1; siehe Abb. 8.

Zeigen Sie mit Hilfe einer Sattelpunkt-Analyse, dass das asymptotische Verhalten von b_n für $n \to \infty$ gegeben ist durch

$$b_n \sim \frac{\sqrt{3}\cdot 3^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

17.3 Eine konzeptuelle Erklärung

In beiden Beispielen zur Stirling-Formel und dem zentralen Binomialkoeffizienten trafen wir „ad hoc“-Entscheidungen zur Behandlung der Integrale, nämlich zur Wahl des Radius r der



(a) (b)

Abbildung 8: Illustration (mit $n = 40$) der Zufallswege, aufgezählt nach (a) den zentralen Binomialkoeffizienten und (b) den zentralen Trinomialkoeffizienten.

Integrationskurve, zur Wahl des Variablenwechsels usw. . Nun wollen wir systematischer vorgehen und sehen, ob man diese Ideen verallgemeinern kann. Beachte, dass die Größen, die wir abzuschätzen suchen, eine besondere Form hatten, in der eine Funktion $g(z)$ oder Zahlenfolge in der Form

$$\begin{aligned} a(n) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{e^{-ng(z)}}{z^n}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\exp\Big(-n(g(z)+\log z)\Big)\frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ng(re^{it})}r^{-n}e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\Big(-n(g(re^{it})+it-\log r)\Big)dt \end{aligned}$$

darstellbar waren.

(Manchmal könnte $g(z)$ allerdings als $g_n(z)$ auftreten, also als eine von n abhängige Funktionenfolge.) Die Schlüsselidee der Methode ist die Wahl des Kurvenradius r zur Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dz}(g(z)+\log z) = g'(z)+\frac{1}{z} = 0.$$

Diese Wahl bewirkt, dass der Term 1-er Ordnung in der Taylorenwicklung von $g(z)+\log z$ um $z = r$ verschwindet. Übrig bleibt dann ein konstanter Term, der aus dem Integral „gezogen“ werden kann; ein Term 2-ter Ordnung , der (in den günstigen Umständen, in denen diese Methode tatsächlich funktioniert) dafür verantwortlich ist, dass der Integrand durch eine Gauss'sche Dichte-Funktion $e^{-u^2/2}$ nahe $z = r$ gut approximiert werden kann, und schließlich Terme niedrigerer Ordnung, von denen man zeigen kann, dass sie asymptotisch vernachlässigbar sind.

Plottet man den Graphen von $|g(z)+1/z|$, dann findet man geometrisch, dass an $z = r$ ein Sattelpunkt auftritt, und das ist der Ursprung des Terms „Sattelpunktmethode“. Dieses Phänomen wird illustriert mit vielen schönen Beispielen und Graphiken in den Folien zur Vorlesung [6], welche von Flajolet und Sedgewick als Online-Ressource bereitgestellt werden - als Begleitmaterial ihres exzellenten Lehrbuchs „Analytic Combinatorics“ [5].

Übung 19. Es ist lehrreich, ein Beispiel zu sehen, in dem die Sattelpunkt-Analyse *fehlschlägt*, sofern sie gedankenlos angewendet wird, d.h. ohne zu prüfen, ob das Integral, von dem üblicherweise angenommen wird, dass sein Beitrag vernachlässigbar ist, sich tatsächlich so verhält.

Ein einfaches Beispiel für potentielles Fehlverhalten ist die Funktion

$$f(z) = e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n .$$

Die Taylorkoeffizienten sind

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{(n/2)!} & n \text{ even}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Natürlich muss sich jede Analyse, asymptotisch oder nicht, darum kümmern, dass sich die b_n anders verhalten für gerade bzw. ungerade Indizes n. Versuche mit der von uns entwickelten Methode eine asymptotische Entwicklung für die b_n herzuleiten! Die Methode versagt, aber das Fehlverhalten is tleicht korrigierbar, indem man sich überlegt, dass tatsächlich mehrere (hier zwei) Sattelpunkte vorliegen, von denen jeder zum Integral beiträgt und zwar so, dass für ungerade n sich die Beiträge gegenseitig auslöschen und für gerade sich gegenseitig verstärken. Das zeigt, dass „Perioden" ein üblicher Grund für das Versagen sind - man muss sie bei asymptotischen Analysen berücksichtigen.

Übung 20. Ein weiteres amüsantes Beispiel liefert die Anwendung der Sattelpunktmethode auf die Funktion $f(z) = 1/(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, für welche die Taylorkoeffizienten $d_n = 1$ alle gleich 1 sind. Können Sie eine asymptotische Formel für die konstante Funktion 1 herleiten?

17.4 Beispiel 3: Stirling's Formel für die Gamma-Funktion.

Unser nächstes Ziel ist der Beweis einer schärferen Form von Stirling's Formel, welche eine asymptotische Formel für $\Gamma(t)$ ergibt, der Fortsetzung der Fakultäts-Funktion für nichtganzzahlige Argumente. Speziell werden wir beweisen:

Satz 39 (Stirling's Approximation von $\Gamma(t)$)**.** *Für reell-wertige Argumente t genügt für die Gamma-Funktion die asymptotische Formel*

$$\Gamma(t) = \left(1 + O(t^{-1/5})\right) \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left(\frac{t}{e}\right)^t \qquad (t \to \infty).$$

Beweis. Wir benutzen die sogenannte **Laplace-Methode**, das ist eine Variante der Sattelpunkt-Methode, adaptiert an die Abschätzung reeller Integrale anstelle von Kurvenintegralen um Kreise.Wir beginnen mit dem Integral

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1}\, dx$$

Wir wechseln die Variable $x = tu$ im Integral und erhalten, dass

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= t^t \int_0^{\infty} e^{-tu} u^{t-1}\, du = t^t e^{-t} \int_0^{\infty} e^{-tu+t} u^{t-1}\, du \\ &= t^t e^{-t} \int_0^{\infty} e^{-tu+t} u^{t-1}\, du = t^t e^{-t} \int_0^{\infty} e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{u} = \left(\frac{t}{e}\right)^t I(t). \end{aligned}$$

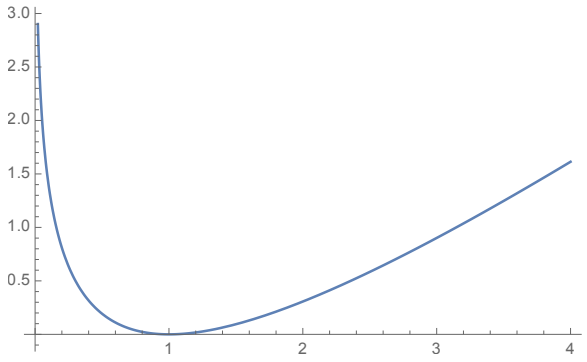


Abbildung 9: Die Funktion $\Phi(u) = u - 1 - \log u$.

Da definieren wir

$$\Phi(u) = u - 1 - \log u,$$
$$I(t) = \int_0^\infty e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{u}.$$

(Beachte wiederum, dass wir das Integral behandelten, damit die Taylor-Entwicklung von $-\log u$ um $u = 1$ bis zur ersten Ordnung verschwindet.) Wir haben vor zu zeigen, dass

$$I(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} + O(t^{-7/10}) \qquad \text{as } t \to \infty.$$

Wie zuvor werden wir dazu das Integral aufspalten in einen Hauptterm und Fehlerterme. Die Idee ist, dass für großes t, der Großteil des Beitrags zum Integral aus einem Gebiet kommt, das sehr nah beim Punkt liegt, an dem contribution to the integral comes from a region very near the point where $\Phi(u)$ sein Minimum annimmt. Mit Hilfe von Differentiation überprüft man leicht, dass dieses Minimum $u = 1$ auftritt. Daher haben wir

$$\Phi(1) = 0, \quad \Phi'(1) = 0, \quad \Phi''(1) = 1,$$

and $\Phi(u) \geq 0$ for all $u \geq 0$. Siehe Abb. 9. Es bezeichne

$$I_1 = \int_0^{1/2} e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{u},$$
$$I_2 = \int_{1/2}^2 e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{u},$$
$$I_3 = \int_2^\infty e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{u},$$

so that $I(t) = I_1 + I_2 + I_3$. Der Hauptbeitrag kommt von I_2, dem Teil des Integrals, der den kritischen Punkt $u = 1$ enthält. Daher wollen wir diesen Term zuerst untersuchen. Wir entwickeln $\Phi(u)$ in eine Taylorreihe um $u = 1$ und erhalten

$$\Phi(u) = \frac{(u-1)^2}{2} + O((u-1)^3)$$

für $u \in [1/2, 2]$ (tatsächlich kann die explizite Schranke $\left|\Phi(u) - \frac{(u-1)^2}{2}\right| \leq (u-1)^3$ auf diesem Intervall leicht überprüft werden). Wie zuvor notieren wir, dass

$$t\left[\frac{(u-1)^2}{2} + O((u-1)^3)\right] = \frac{1}{2}(\sqrt{t}(u-1))^2 + O\left(\frac{(\sqrt{t}(u-1))^3}{\sqrt{t}}\right).$$

Wir wissen, dass es an dieser Stelle natürlich ist, einen linearen Variablenwechsel $v = \sqrt{t}(u-1)$ zu machen, um den Integranden in eine skalenfreie zentrierte Form zu bringen. Das führt zu

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \exp\left(-t\Phi\left(1+\frac{v}{\sqrt{t}}\right)\right) \frac{1}{1+v/\sqrt{t}}\, dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{v^2}{2} + O\left(\frac{v^3}{\sqrt{t}}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{t}{\sqrt{t}}\right)\right) dv. \end{aligned}$$

Wie vorangehend, müssen wir dieses Integral in zwei Integrale zerlegen, um die Tatsache zu berücksichtigen, dass sich der $O(v^3/\sqrt{t})$-Term aufblähen kann, wenn v hinreichend groß wird. Sei $M = t^{1/10}$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-M}^{M} \exp\left(-t\Phi\left(1+\frac{v}{\sqrt{t}}\right)\right) \frac{1}{1+v/\sqrt{t}}\, dv, \\ J_2 &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{[-\frac{1}{2}\sqrt{t},\sqrt{t}]\setminus[-M,M]} \exp\left(-t\Phi\left(1+\frac{v}{\sqrt{t}}\right)\right) \frac{1}{1+v/\sqrt{t}}\, dv, \end{aligned}$$

so dass $I_2 = J_1 + J_2$. Für J_1 haben wir

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-M}^{M} \exp\left(-t\Phi\left(1+\frac{v}{\sqrt{t}}\right)\right) \frac{1}{1+v/\sqrt{t}}\, dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-M}^{M} e^{-v^2/2}\left(1+O\left(\frac{v^3}{\sqrt{t}}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{v}{\sqrt{t}}\right)\right) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+O(t^{-1/5})\right) \int_{-M}^{M} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\left(1+O(t^{-1/5})\right). \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt benutzen wir eine ähnliche Abschätzung wie in unserem Beweis von Stirling's Approximation von $n!$. Dann benutzen wir für J_2 die elementare Ungleichung (Beweis als Übung empfohlen!)

$$\Phi(u) \geq \frac{(u-1)^2}{2} \qquad (0 \leq u \leq 1),$$

und die offensichtlichere Tatsache, dass $1/(1+v/\sqrt{t}) \leq 2$ für $v \in [-\frac{1}{2}\sqrt{t}, \sqrt{t}]$. Damit erhalten wir wie in unserem früheren Beweis

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{2}{\sqrt{t}} \int_{[-\frac{1}{2}\sqrt{t},\sqrt{t}]\setminus[-M,M]} e^{-v^2/2}\, dv \leq \frac{4}{\sqrt{t}} \int_{M}^{\infty} e^{-v^2/2}\, dv \\ &= O(e^{-M}) = \frac{1}{\sqrt{t}} O(t^{-1/5}). \end{aligned}$$

Mit all diesen Zwischenergebnissen haben wir in Summe gezeigt, dass

$$I_2 = \left(1+O(t^{-1/5})\right)\sqrt{\frac{2\pi}{t}}.$$

Nun suchen wir eine Schranke für I_1. Hier benutzen wir eine andere Methode, da es einen anderen Grund für Ärger nahe dem linken Ende $u = 0$ des Integrationsintervalls gibt. Betrachten wir zunächst ein eingeschränktes Integral über $[\varepsilon, 1/2]$ und führen eine partielle Integration durch, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{1/2} e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{u} &= -\frac{1}{t} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{d}{du}\left(e^{-t\Phi(u)}\right) \frac{1}{\Phi'(u)u}\, du \\ &= -\frac{1}{t}\left[\frac{e^{-t\Phi(u)}}{u-1}\right]_{u=\varepsilon}^{u=1/2} - \frac{1}{t}\int_{\varepsilon}^{1/2} e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{(u-1)^2}. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ (beachte, dass $\Phi(\varepsilon) \to +\infty$ bei diesem Grenzwert) ergibt die Formel

$$I_1 = \frac{2}{t} e^{-t\Phi(1/2)} - \frac{1}{t} \int_0^{1/2} e^{-t\Phi(u)} \frac{du}{(u-1)^2} = O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{as } t \to \infty.$$

Am Ende überlasse ich es Ihnen als Übung, zu einer ähnlichen Abschätzung $I_3 = O(1/t)$ für das übrig gebliebene Intervall $[2, \infty)$ zu kommen. Die Kombination der verschiedenen Abschätzungen führt nun zu

$$I(t) = I_1 + I_2 + I_3 = \left(1 + O(t^{-1/5})\right) \sqrt{\frac{2\pi}{t}}.$$

□

Siehe auch die Analyse in Anhang A von [11]. Die dortige detailliertere Analyse zeigt, dass die asymptotische Formel, die wir für $\Gamma(t)$ bewiesen, für komplexe t gültig bleibt. Speziell wird gezeigt, dass für komplexe s in dem „Pac-Man"-förmigen Gebiet gilt

$$S_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \geq \pi - \delta\}$$

(für jedes fixe $0 < \delta < \pi$) erfüllt die Gamma-Funktion die Gleichung

$$\Gamma(s) = \left(1 + O(|s|^{-1/2})\right) \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} e^{-s} \qquad \text{as } |s| \to \infty,\ s \in S_\delta.$$

Hier ist $s^{s-1/2}$ definiert als $\exp((s-1/2)\operatorname{Log} s)$, wobei Log wie üblich den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Diese Art der Approximation ist wichtig in gewissen Anwendungen der Funktionentheorie, z.B. in der analytischen Zahlentheorie.

Probleme

1. Im Folgenden finden Sie eine Liste grundlegender Formeln aus der Funktionentheorie, die Sie im Schlaf beherrschen sollten. Schauen Sie jede an, versichern Sie sich, dass Sie die Formel verstehen und warum sie zutrifft. Falls es sich um eine Definition handelt: Verstehen Sie, was definiert wird und warum die Definition sinnvoll ist? Falls es sich um einen Satz handelt: Können Sie ihn beweisen?

   In den folgenden Formeln bezeichnen a, b, c, d, t, x, y beliebige reelle Zahlen; w, z bezeichnen beliebige komplexe Zahlen.

   a. $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
   b. $i^2 = -1$
   c. $\frac{1}{i} = -i$
   d. $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$
   e. $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$
   f. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
   g. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
   h. $|z|^2 = z\overline{z}$
   i. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
   j. $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$
   k. $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
   l. $|wz| = |w| \cdot |z|$
   m. $\Big||w| - |z|\Big| \leq |w+z| \leq |w| + |z|$
   n. $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$
   o. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
   p. $|e^z| \leq e^{|z|}$
   q. $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$
   r. $|e^{it}| = 1$
   s. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
   t. $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
   u. $e^{\pi i} = -1$
   v. $e^{\pm\pi i/2} = \pm i$
   w. $e^{2\pi i} = 1$

2. Erinnern Sie sich an folgende Definitionen der Funktionentheorie? (insbesondere in Remmert, Funktionentheorie I oder Jänich, Einführung in die Funktionentheorie) oder - falls erforderlich - in online-Ressourcen). Denken Sie darüber nach, bevor Sie diese nachschauen!

   a. Realteil
   b. Imaginärteil
   c. komplex konjugiert
   d. Betrag (einer komplexen Zahl)
   e. Argument
   f. offene Menge (in $\mathbb{C}$)
   g. abgeschlossene Menge
   h. zusammenhändende Menge
   i. beschränkte Menge
   j. kompakte Menge
   k. Gebiet
   l. konvergente Folge
   m. Cauchy-Folge
   n. Grenzwert
   o. Häufungspunkt
   p. stetige Funktion
   q. differenzierbare Funktion (einer komplexen Variablen)
   r. holomorphe Funktion

s. analytische Funktion

t. ganze Funktion

u. meromorphe Funktion

v. harmonische Funktion (zweier Variablen)

3. Bestimme für die folgenden Funktionen die Menge der z, für die sie analytisch sind:

a. $f(z) = z$

b. $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

c. $f(z) = |z|$

d. $f(z) = |z|^2$

e. $f(z) = \overline{z}$

f. $f(z) = 1/z$

4. Bestimme für jede der folgenden Funktionen $u(x,y)$, ob es eine Funktion $v(x,y)$ gibt, so dass $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine ganze Funktion ist. Falls ja, bestimmen Sie diese und versuchen Sie , eine Formel für $f(z)$ zu finden, und zwar in z - nicht mit Real- und Imaginärteil. (**Hinweis:**[4])

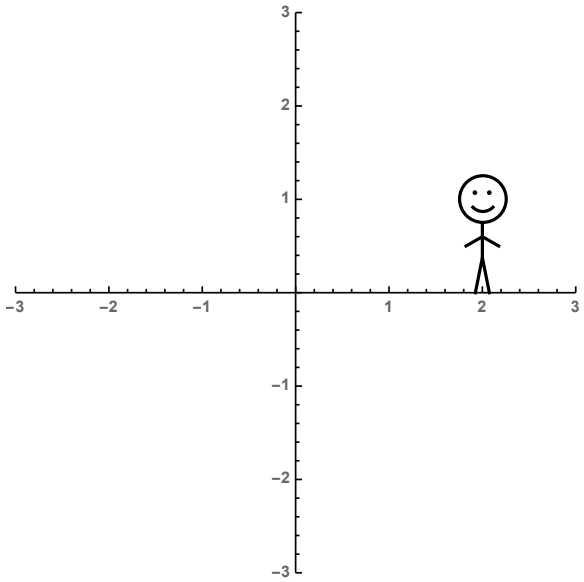
a. $u(x,y) = x^2 - y^2$

b. $u(x,y) = y^3$

c. $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + 3x + y^4 - 2$

d. $u(x,y) = \cos x \cosh y$

5. Skizzieren Sie (ungefähr, so genau Sie können) das Bild in der w-Ebene der folgenden Figur in der z-Ebene



unter jeder der folgenden Abbildungen $w = f(z)$:

a. $w = \frac{1}{2}z$

b. $w = iz$

c. $w = \overline{z}$

d. $w = (2+i)z - 3$

e. $w = 1/z$

f. $w = z^2 - 1$

[4] Benutzen Sie bekannte Gleichungen, welche nach Pionieren der Funktionentheorie benannt sind

6. Beweisen Sie, dass die komplexen Zahlen a, b, c genau dann die Scheitel eines gleichseitigen Dreiecks sind, wenn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

7. Illustrieren Sie die Behauptung auf Seite ?? bezüglich der Orthogonalität der Niveaulinien des Realteils und Imaginärteils analytischer Funktionen, indem Sie die Niveaulinien von $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ für $f = z^2$, $f = e^z$ zeichnen (händisch nach Erarbeiten der relevanten Gleichungen oder mit Computer).

8. Eine unmittelbare Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra (zusammen mit folgender Standardeigenschaft von Polynomen: c ist eine Nullstelle von $p(z)$ genau dann, wenn $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - c$ teilbar ist) ist, dass jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

(wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$), faktorisiert werden kann als

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

mit gewissen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (das sind die Nullstellen von $p(z)$, entsprechend Vielfachheit gezählt). Benutzen Sie das und beweisen Sie, dass jedes solche Polynom mit *reellen* Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ eine Faktorzerlegung

$$p(z) = a_n Q_1(z) Q_2(z) \ldots Q_m(z)$$

hat, wobei jedes $Q_k(z)$ ein lineares oder quadratisches Monom ist (d.h., es hat die Form $z - c$ oder $z^2 + bz + c$) mit reellen Koeffizienten.

9. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ ein komplexes Polynom mit Grad n (d.h., $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$), welches nach der vorangehenden Frage 1 faktorisiert werden kann als

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

wobei die Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ von $p(z)$ gezählt werden entsprechend ihren Vielfachheiten. Für $n \geq 2$ kann die Ableitung $p'(z)$ in ähnlicher Weise faktorisiert werden mit Faktorzerlegung

$$p'(z) = n a_n \prod_{k=1}^{n-1} (z - w_k)$$

wobei $w_1, \ldots, w_{n-1}$ die Nullstellen von $p'(z)$ bezeichnen sollen. Beweisen Sie, dass $w_1, \ldots, w_{n-1}$ alle in der konvexen Hülle von $z_1, \ldots, z_n$ (siehe Bild 1 für eine Illustration) liegen. Das heißt, dass jedes w_k als konvexe Kombination

$$w_k = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n,$$

dargestellt werden kann, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nicht negative Zahlen sind und $\sum_j \alpha_j = 1$. (Hinweis: Für jedes k gibt es unterschiedliche Koeffizienten.)

Hinweis: Eine komplexe Zahl z ist eine Nullstelle von $p'(z)$ und *keine* Nullstelle von $p(z)$ genau dann, wenn $p'(z)/p(z) = 0$. (Notiz: Der Ausdruck p'/p wird auch logarithmische Ableitung von p genannt.) Finden Sie eine Methode, welche diese Gleichung illustriert.

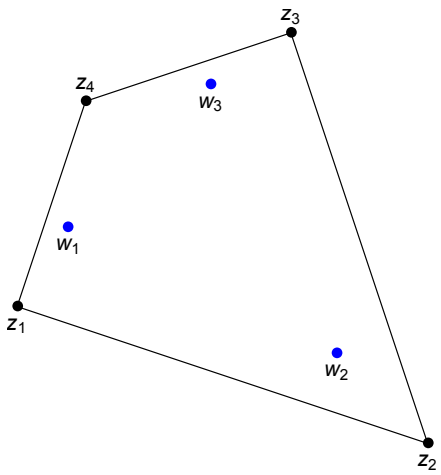


Abbildung 10: Ein Beispiel für die Nullstellen eines komplexen Polynoms und seiner Ableitung. Hier ist $z_1 = 0$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = 2 + 2i$, $z_4 = \frac{1+3i}{2}$ und $w_1 \doteq 0.375 + 0.586i$, $w_2 \doteq 2.336 - 0.335i$, $w_3 \doteq 1.414 + 1.624i$.

10. **Cardano's Methode zur Lösung kubischer Gleichungen.** Es sei $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Wir wollen die Gleichung $p(z) = 0$ lösen, d.h. die Nullstellen des kubischen Polynoms $p(z)$ finden.

    (a) Zeigen Sie, dass die Substitution $w = z - \frac{b}{3a}$ die Gleichung in die einfachere Form

    $$w^3 + pw + q = 0 \tag{5}$$

    bringt, mit gewissen Werten für p, q (finden Sie p, q!) als Funktionen von a, b, c, d.

    (b) Zeigen Sie: Hat man eine Lösung von (5) der Form $w = u + v$, dann kann die Gleichung (5) für w gelöst werden, indem man ein Paar u, v komplexer Zahlen findet, so dass die Gleichungen

    $$p = -3uv, \tag{6}$$
    $$q = -(u^3 + v^3) \tag{7}$$

    erfüllt sind.

    (c) Erklären Sie, warum man, um das Gleichungspaar (6)–(7) zu lösen, alternativ das Gleichungssystem

    $$\frac{p^3}{27} = -RS, \tag{8}$$
    $$q = -(R + S), \tag{9}$$

    lösen kann - wobei wir an dieser Selle zwei Unbekannte R, S einführen, welche definiert sind durch $R = u^3$, $S = v^3$. Präziser formuliert: Jede Lösung von (6)–(7) kann man erhalten aus *einer* (hoffentlich einfacher bestimmbaren) Lösung von (8)–(9).

(d) Erklären Sie, warum das Lösungsproblem für (8)–(9) in den Unbekannten R, S äquivalent ist zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{10}$$

in einer (komplexen) Unbekannten t.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der vorangehenden Reduktionen, dass die drei Lösungen der vereinfachten kubischen Gleichung (5) ausgedrückt werden können als

$$\begin{aligned} w_1 &= u + v, \\ w_2 &= \zeta u + \overline{\zeta} v, \\ w_3 &= \overline{\zeta} u + \zeta v, \end{aligned}$$

wobei $\zeta = e^{2\pi i/3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ (eine kubische Einheitswurzel) ist und u, v sind geeignet gewählte kubische Wurzeln R, S, die man als Lösungen zu (10) erhält.

(f) Illustrieren Sie die eben geschilderte Vorgehensweise anhand der Nullstellensuche für die kubische Gleichung

$$z^3 + 6z^2 + 9z + 3 = 0.$$

Transformieren Sie die Formeln so, dass klar wird, dass die Nullstellen reell sind.

11. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2 Matrix. Beweisen Sie das „Konformitäts-Lemma“ von Seite 9, welches die Äquivalenz der folgenden drei Bedingungen behauptet:

(a) A ist als lineare Abbildung orientierungserhaltend (d.h., $\det A > 0$) und konform, d.h.

$$\frac{\langle Aw_1, Aw_2 \rangle}{|Aw_1||Aw_2|} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1||w_2|}$$

für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$. (Hier bezeichnet $\langle w_1, w_2 \rangle$ das Standard-Skalarprodukt (Euklidisches Skalarprodukt) im $\mathbb{R}^2$, und $|w| = \langle w, w \rangle^{1/2}$ ist die übliche 2-dimensionale Norm von Vektoren im $\mathbb{R}^2$.)

(b) A hat die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) A hat die Form $A = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ für gewisse $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$. (Geometrisch heißt das: A ist eine Rotation, gefolgt von einer Skalierung.)

12. Eine Funktion $f = u + iv$ einer komplexen Variablen $z = x + iy$ stellt man sich traditionell vor als eine Funktion der zwei Koordinaten x und y. Stellen wir uns jedoch die Gleichungen

$$z = x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy$$

vor als einen formalen Variablenwechsel von den „reellen Koordinaten“ (x, y) zu „komplex konjugierten Koordinaten“ $(z, \overline{z})$, dann kann es sinnvoll sein, sich f als Funktion der

zwei Variablen z und $\overline{z}$ (man tut so, also ob dies zwei unabhängige Variablen wären) vorzustellen. Dann haben wir die suggestiven Schreibweisen $u = u(z,\overline{z})$ und $v = v(z,\overline{z})$ und betrachten Operationen wie z.B. das Bilden partieller Ableitungen von f, u, v bezüglich z und $\overline{z}$.

Zeigen Sie, dass - bei dieser etwas befremdlichen Sichtweise - die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

umgeschrieben werden können in das etwas präzisere Äquivalent

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Dabei nimmt man an, dass es in Ordnung geht, die Kettenregel der Analysis mehrerer Veränderlicher anzuwenden ...

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

13. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in einem Gebiet Ω definierte Funktion mit der Eigenschaft, dass sowhl die Funktion $f(z)$ als auch $zf(z)$ einen Realteil und einen Imaginärteil haben, der jeweils harmonisch ist (d.h., dass sie die Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllen). Zeigen Sie, dass $f(z)$ auf Ω holomorph ist.

14. **Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen** Gegeben sei eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, definiert in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$. Wir sagen, dass f_n **gleichmäßig auf kompakten Teilmengen** gegen eine Grenzfunktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ $f_n(z) \to f(z)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig für $z \in K$.

    (a) (Warm-up) Schreiben Sie dies präziser mit einer ϵ-δ Terminologie.

    (b) Beweisen Sie: Sind die f_n holomorphe Funktionen, $f_n \to f$ sei gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen, und $f_n' \to g$ konvergiere gleichmäßig auf kompakten Teilmengen, und g sei stetig, dann ist f holomorph und $f' = g$.

    Hinweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Beginne mit dem Beweis, dass für z in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0 folgende zwei Gleichungen gelten:

    $$f_n(z) = f_n(z_0) + \int_{z_0}^{z} f_n'(w)\, dw,$$
    $$f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^{z} g(w)\, dw,$$

    wobei das Integral über das Geradensegment geht, das z_0 mit z verbindet.

    (c) Beweisen Sie: Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen ihres Konvergenzkreises und die Funktion, die sie definiert, ist stetig.

    Hinweis: Es genügt (erklären Sie warum!), die gleichmäßige Konvergenz auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe der Form $\overline{D_r(0)}$ mit $0 < r < R$ zu zeigen, wobei R der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.

(d) Folgern Sie: Potenzreihen sind holomorphe Funktionen, welche termweise differenziert werden dürfen (dies haben wir in der Vorlesung schon direkter bewiesen; das ist ein alternativer Beweis).

Bemerkung. Dieses Problem erfordert nur elementare Argumente. Aber mit Hilfe fortgeschrittener Erkenntnisse werden wir als Folge des Cauchy'schen Integralsatzes beweisen, dass in Teil b) die Annahme, dass die Folge der Ableitungen f_n' gegen eine Grenzfunktion konvergiert, nicht gebraucht wird. Wenn eine Folge holomorpher Funktionen auf kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergiert, dann ist ihre Grenzfunktion schon holomorph und die Ableitung der Grenzfunktion ist die Grenzfunktion der Ableitungen der Originalfunktion. Das ist überraschend und nicht trivial, denn man illustriert anhand reeller Funktionenfolgen, dass das im reellen Fall nicht gilt. Z. B. konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) = \sin nx/n$ gleichmäßig gegen Null, die Folge der Ableitungen f_n' aber nicht!).

15. **Cauchyscher Integralsatz und rotationsfreie Vektorfelder** Wir erinnern uns aus der Vektor-Analysis, dass ein ebenes Vektorfeld $\mathbf{F} = (P, Q)$, das auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definiert ist, **konservativ** genannt wird, wenn es die Form $\mathbf{F} = \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$ (der Gradient von g) für eine skalare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ hat. Nach dem Fundamentalsatz der Analysis für Linienintegrale haben wir für so ein Vektorfeld

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0$$

für jede *geschlossene* Kurve γ. Erinnern Sie sich auch (wie man leicht feststellt) dass jedes konservative Vektorfeld **rotationsfrei** ist, d.h., es erfüllt

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$$

(wobei im Kontext 2-dimensionaler Vektorfelder der curl einfach gleich $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$) ist. Die Umkehrung gilt bei geeigneten Voraussetzungen auch: Falls das Gebiet Ω **einfach zusammenhängend** ist (ein Konzept, das wir später in der Vorlesung diskutieren werden), dann besagt ein Satz aus der Vektor-Analysis, dass ein rotationsfreies Vektorfeld auch konservativ ist.

Benutzen Sie diese Hintergrundinformationen und zeigen Sie: Ist $f = u + iv$ holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω, dann ist

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ in Ω. (Das ist natürlich der Integralsatz von Cauchy.)

16. **Die Bernoulli-Zahlen.** Definiere die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & \text{falls } z \neq 0, \\ 1 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

(a) Überzeugen Sie sich, dass $f(z)$ in einer Umgebung von 0 analytisch ist. Wo sonst ist es noch analytisch? Finden Sie den maximalen Konvergenzradius R, so dass $f(z)$ auf der Kreisscheibe $D_R(0)$ analytisch ist.

(b) Ein grundlegender Satz aus der Funktionentheorie, den wir diskutieren werden, ist, dass analytische Funktionen eine Potenzreihenentwicklung haben. Die **Bernoulli-Zahlen** sind die Zahlen $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, welche definiert werden durch die Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = f(z).$$

Zum Beispiel sind die ersten drei Bernoulli-Zahlen $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$. Beweisen Sie für die Bernoulli-Zahlen folgende Identitäten:

i. $B_{2k+1} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$ (aber nicht für $k = 0$).

Hinweis: Eine Funktion $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ erfüllt $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$ genau dann, wenn $g(z) = g(-z)$, d.h. $g(z)$ ist eine gerade Funktion.

ii. $(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \ (n \geq 2)$.

iii. $(2n+1)B_{2n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} B_{2k} B_{2n-2k}, \quad (n \geq 2)$.

Hinweis: Zeige, dass die Funktion $g(z) = f(z) + z/2$ die Gleichung

$$g(z) - zg'(z) = g(z)^2 - z^2/4$$

erfüllt.

iv. $\dfrac{z}{2} \coth\left(\dfrac{z}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

(c) Ein weiteres allgemeines Ergebnis ist, dass der Konvergenzradius einer Potenzreihe einer analytischen Funktion um $z = z_0$ genau gleich dem Radius der maximalen Kreisscheibe um z_0 ist, in der f analytisch ist. Mache diese Annahme und beweise, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{B_n}{n!}\right|^{1/n} = 1/R,$$

wobei R die in (a) gefundene Zahl ist. (Notiz: In einem späteren Problem 26 auf den Seiten 87–89 werden wir eine viel genauere Abschätzung herleiten für die asymptotische Wachstumsrate der Bernoulli-Zahlen.)

17. **Bessel-Funktionen** Die **Bessel-Funktionen** sind eine Familie von Funktionen $(J_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ einer komplexen Variablen,welche definiert sind durch

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

(Beachten Sie, dass $J_0(-2\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}$, was an die Exponentialfunktion erinnert und eine ziemlich natürliche Funktion fürs Studium darstellt.) Finden Sie den Konvergenzradius der Reihe für $J_n(z)$, und beweisen Sie folgende Eigenschaften der Bessel-Funktionen:

i. $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

ii. Rekurrenz-Relation: $J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z)$.

iii. Bessel's Differentialgleichung: $z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0$.

iv. Summation bzw. Zerlegung der Eins: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n J_n(z) = 1$.

v.* Weitere gemischte Identitäten (für Liebhaber solcher Dinge — Sie können das auslassen, wenn Sie solche Rechnungen nicht interessieren):

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n,$$

$$\cos(z \sin t) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2nt),$$

$$\sin(z \sin t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z) \sin((2n+1)t),$$

$$\cos(z \cos t) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \cos(2nt),$$

$$\sin(z \cos t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z) \sin((2n+1)t),$$

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin t - nt)\, dt.$$

Hinweis zur letzten Gleichung: $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Bemerkung: Die Bessel-Funktionen sind sehr wichtige Funktionen in der mathematischen Physik und treten naturgemäß auf in Verbindung mit einigen Problemen in der Diffusion, der Wärmeleitung, Elektrodynamik, Quantenmechanik, Brownschen Bewegung, Wahrscheinlichkeit ... und mehr. Neuerdings spielen Sie eine größere Rolle in der Kombinatorik im Kontext längster wachsender Teilfolgen (darüber hab ich ein Buch geschrieben, das man von meiner Homepage downloaden kann.) Ihre Eigenschaften als analytische Funktionen einer komplexen Variablen sind auch ein klassisches, wenn auch nicht länger ein modisches, Studienobjekt.

18. Zeigen Sie, dass der Satz von Liouville („eine beschränkte ganze Funktion ist konstant") direkt bewiesen werden kann, indem man den „einfachen" ($n = 0$) Fall der Cauchy'schen Integralformel heranzieht - an Stelle des Falles $n = 1$ der erweiterten Formel, die wir in der Vorlesung benutzten.

    Hinweis: Zeige für ein beliebiges Paar $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dass $|f(z_1) - f(z_2)| = 0$.

19. Zeigen Sie, dass der Satz von Liouville sogar nur aus der Mittelwert-Eigenschaft holomorpher Funktionen, welche ein Spezialfall der Cauchyschen Integralformel ist - in der z genommen wird als Mittelpunkt des Kreises, über den integriert wird - hergeleitet werden kann.

    Hinweis: Es ist hier sinnvoll, eine modifizierte Version der Mittelwert-Eigenschaft (welche leicht aus der Originalversion folgt) zu betrachten: Sie besagt, dass $f(z)$ der Mittel-

wert von $f(w)$ über einer *Kreisscheibe* $D_R(z)$ ist (anstelle eines Kreises $C_R(z)$). Das heißt

$$f(z) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z)} f(x+iy)\, dx\, dy,$$

wobei das Integral ein gewöhnliches 2-dimensionales Riemann-Integral ist. Erklären Sie, warum diese Formel gilt und benutzen Sie diese dann, um eine obere Schranke für $|f(z_1) - f(z_2)|$ zu erhalten - eine Schranke, die für $R \to \infty$ gegen 0 geht.

20. Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Es sei f eine ganze Funktion, welche für alle $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n$$

für gewisse Konstnaten $A, B > 0$ und ganze Zahlen $n \geq 0$ erfüllt. Dann ist f ein Polynom mit Grad $\leq n$.

21. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \ldots + a_0$ ein Polynom mit Grad n, so dass

$$|a_n| > \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|.$$

Beweisen Sie, dass $p(z)$ genau n Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) in der Kreisscheibe $|z| < 1$ hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

Hinweis: Das ist ein Spezialfall einer weniger elementaren Tatsache, die mit Hilfe des Satzes von Rouché beweisbar ist. Siehe das Problem 28.

22. Die Cauchysche Integralformel ist eng verwoben mit einer wichtigen Formel aus der Theorie der Laplace-Gleichung und der harmonischen Funktionen, der sogenannten *Poisson-Integralformel*. Lösen Sie die Übungen 11-12 (Seiten 66-67) in Kapitel 2 von [Stein-Shakarchi], welche diese Verbindung erklären, und allgemeiner die Verbindung zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen.

23. Denken Sie mindestens 5–10 Minuten über das Konzept **Spielzeug-Randkurve** nach. Speziell über den Fall der **Schlüsselloch-Randkurve**, die wir im Kontext „Beweis der Cauchyschen Integralformel“ diskutierten. Überdenken Sie sorgfältig die Schritte, die notwendig waren für den Beweis der Cauchyschen Formel für Gebiete, die von einer solchen Randkurve eingeschlossen werden. Noch besser wäre: Skizzieren Sie einen Beweis der Kernaussage, dass eine in einem solchen Gebiet holomorphe Funktion (die daher die Eigenschaft hat, dass ihr Randintegral über Dreiecken und Rechtecken verschwindet) eine Stammfunktion hat.

24. **Charakterisierung wichtiger Familien holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}$und $\widehat{\mathbb{C}}$.** Für die

folgenden Probleme vereinbaren wir folgende Bezeichnungen:

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \text{die Riemannsche Zahlenkugel},$$

$$\mathcal{K} = \text{Menge der konstanten Funktionen } z \mapsto c \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{L} = \text{Menge der linearen Funktionen } z \mapsto az + b, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{P} = \text{Menge der komplexen Polynome } z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

$$\mathcal{R} = \text{Menge der rationalen Funktionen } z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \in \mathcal{P},$$

$$\mathcal{M} = \text{Menge der Möbiustransformationen } z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Beachten Sie die Teilmengen-Beziehungen $\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{R} \supset \mathcal{M} \supset \mathcal{L} \supset \mathcal{K}$.

(a) (Warm-up problem) Eine ganze Funktion hat eine hebbare Singularität in ∞ genau dann, wenn sie konstant ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge der ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche in ∞ *keine* wesentlichen Singularitäten haben, $\mathcal{P}$ ist, also die Menge der Polynome.

(c) Beweisen Sie, dass die Menge der meromorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$, die in ∞ eine nicht wesentliche Singularität haben, gleich $\mathcal{R}$ ist, also gleich der Menge der rationalen Funktionen.

(d) Beweisen Sie, dass die Menge der meromorphen, bijektiven Funktionen $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ gleich $\mathcal{M} \backslash \mathcal{K}$ ist, also gleich der Menge der nicht-konstanten Möbius-Transformationen.

Hinweis: Benutzen Sie die Charakterisierung im vorangehenden Problem 24c. Zeigen Sie speziell, dass eine rationale Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$, welche injektiv ist, eine Möbius-Transformation sein muss. Zum Beispiel (ich bin unsicher, ob das die einfachste Begründung ist) könnte man so argumentieren: Ist z_0 eine komplexe Zahl mit $q(z_0) \neq 0$ und mit $p'(z_0)q(z_0) - p(z_0)q'(z_0) \neq 0$ und ist $w_0 = f(z_0)$, dann muss die Gleichung $f(z) = w_0$ mehr als eine Lösung in z haben, es sei denn, $p(z), q(z)$ sind lineare Funktionen.

(e) Beweisen Sie, dass die Menge der ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die bijektiv sind, genau die Menge $\mathcal{L} \backslash \mathcal{K}$ ist, also die Menge der *nicht konstanten* linearen Funktionen.

Hinweis: Das ist eher ein Problem für Fortgeschrittene, weil der Satz von Casorati-Weierstraß und der Satz über die offene Abbildung heranzuziehen sind. (vielleicht geht es auch einfacher?). Siehe die Anleitung für Übung 14 auf Seite 105 in [Stein-Shakarchi].

Bemerkungen: Ist ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, oder allgemeiner eine *Riemannsche Fläche* Σ gegeben, dann interessiert Experten für Funktionentheorie das Verständnis der Struktur a) der Menge der holomorphen Funktionen ($\mathbb{C}$-wertige holomorphe Funktionen auf Σ), b) der Menge der meromorphen Funktionen ($\widehat{\mathbb{C}}$-wertige Funktionen) und c) die Menge der holomorphen Automorphismen (holomorphe, bijektive Abbildungen von $\Sigma \to \Sigma$) von Σ auf sich. Obwohl wir uns mit der allgemeinen Theorie Riemannscher Flächen nicht

befassen werden, ist es leicht - wenn man einmal die Konzepte definiert hat - zu sehen, dass die vorangehenden Übungen im Wesentlichen folgende konzeptuell wichtigen Ergebnisse beweisen:

(i) Die konstanten Funktionen sind die einzigen holomorphen Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

(ii) Die rationalen Funktionen sind die meromorphen Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

(iii) Die nicht-konstanten linearen Funktionen sind die holomorphen Automorphismen auf $\mathbb{C}$.

(iv) Die nicht-konstanten Möbiustransformationen sind die holomorphen Automorphismen von $\widehat{\mathbb{C}}$.

Eine weitere naheliegende Erkenntnis, die unschwer zu beweisen ist, besagt:

(v) Die holomorphen Automorphismen der oberen Halbebenne $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ sind die Möbiustransformationen $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 0$. (Versuchen Sie zu beweisen, dass jede derartige Abbildung tatsächlich ein Automorphismus von $\mathbb{H}$ ist; die umgekehrte Implikation, dass alle Automorphismen von $\mathbb{H}$ diese Form haben, ist etwas schwieriger und erfordert ein Ergebnis, das als Schwarz'sches Lemma bekannt ist. Das wird wahrscheinlich in der Vorlesung MAT-205A/B behandelt.)

Beachten Sie , dass die Menge der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (auch als *ganze Funktionen* bezeichnet) und die Menge der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ weitaus größere Funktionsfamilien sind und keine so einfache Beschreibung haben wie Funktionen in den relativ kleinen Familien $\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{M}$. Das ist darauf zurückzuführen, dass $\mathbb{C}$ eine nicht kompakte Riemannsche Fläche ist.

25. **Partialbruchentwicklung des Cotangens.** In dieser mehrteiligen Aufgabe werden Sie gebeten, eine wohlbekannte Identität mit unendlicher Summenbildung zu beweisen (folgende Gleichung (12)). Sie ist bekannt als die *Partialbruchentwicklung des Cotangens*. Im folgenden Problem werden wir dann einige Folgerungen aus dieser wichtigen Entwicklung ziehen.

(a) Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Kurvenintegral

$$I_N := \oint_{\gamma_N} \frac{\pi \cot(\pi w)}{(w+z)^2}\, dw$$

über die Kurve γ_N, die in positiver Richtung um das Rechteck mit den vier Scheiteln $(\pm(N+1/2), \pm N)$ läuft. Bilden Sie den Grenzwert $N \to \infty$ und zeigen Sie die Identität

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}). \tag{11}$$

Fahrplan: Das ist keine triviale Übung; sie ist aber nicht sehr schwer, wenn man Sie in folgende Teilschritte zerlegt:

i. Beginnen Sie mit der Lokalisierung der Singularitäten der Funktion $w \mapsto f_z(w) = \frac{\pi \cot(\pi w)}{(w+z)^2}$ (betrachtet als Funktion von w für fixes z, das keine ganze Zahl ist) und ihrer Residuen. Da kann man das Rechnen mit Residuen richtig lernen!

ii. Gewinnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes einen Ausdruck für das vorangehend definierte Kurvenintegral I_N.

iii. Berechnen Sie separat davon Abschätzungen für I_N, die dafür benutzt werden können zu zeigen, dass $I_N \to 0$ geht für $N \to \infty$. Zeigen Sie speziell durch elementare Umformungen, dass

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \qquad |\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

Folgern Sie daraus: Wenn $x = \pi(N + 1/2)$ und y beliebig ist, dann gilt die Ungleichung

$$|\cot(x+iy)| = \frac{\sinh^2 y}{1+\sinh^2 y} \le 1,$$

und wenn $y = N$ und x beliebig ist, dann gilt die Ungleichung

$$|\cot(x+iy)| \le \frac{1+\sinh^2 N}{\sinh^2 N} \le 2 \quad (\text{falls } N > 10).$$

Berechnen Sie nun mit diesen Ungleichungen eine obere Schranke für das Integral.

iv. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse zu I_N und folgern Sie daraus (11).

(b) Integrieren Sie die Identität (11) und folgern Sie (mit weiteren einfachen Überlegungen ...) die Formeln

$$\pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}). \tag{12}$$

26. **Folgerungen aus der Partialbruchentwicklung des Cotangens.**

(a) Zeigen Sie, dass (12) die folgende Darstellung der sin-Funktion als das folgende unendliche Produkt impliziert:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{13}$$

Beachten Sie, dass die Funktion auf der rechten Seite (oder es kann leicht überprüft werden, dass das so ist) eine ganze Funktion von z ist mit einer einfachen Nullstelle an jeder ganzen Zahl $z = n \in \mathbb{Z}$, und dass ihre Taylorentwicklung um $z = 0$ beginnt mit $\pi z + O(z^3)$. Das ist also ein natürlicher Ansatz für eine unendliche Produktentwicklung von $\sin(\pi z)$, obwohl die Tatsache, dass dieser Ansatz korrekt ist, weniger als naheliegend ist. Zum Beispiel kann man die rechte Seite mit einer beliebigen Funktion $e^{g(z)}$ multiplizieren und wir haben dann immer noch eine ganze Funktion mit derselben Nullstellenmenge.

Hinweis: Berechnen Sie die logarithmischen Ableitungen beider Seiten von (13). Womöglich wollen Sie einige Eigenschaften unendlicher Produkte wiederholen - wie sie zum Beipiel auf den Seiten 140-142 von [Stein-Shakarchi] diskutiert werden. (Wir verraten hier: die Seiten 142–144 enthalten eine Lösung dieser Teilübung, beginnend mit einem unabhängigen Beweis von (12) und fortschreitend mit einer Herleitung von (13) analog zu den von mir vorhin beschriebenen Sachverhalten.)

(b) Mit einem geeigneten speziellen Wert für z in (13) erhält man das folgende unendliche Produkt für π, bekannt als **Wallis' Produkt** (zuerst bewiesen durch John Wallis im Jahre 1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

(c) Zeigen Sie durch Vergleich der ersten Terme in der Taylorentwicklung beider Seiten von (13) um $z = 0$ die wohlbekannten Identitäten

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(d) Allgemeiner kann man (13) benutzen, oder praktischerweise auch (12), um geschlossene Formeln für alle folgenden Reihen

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \ldots,$$

zu erhalten. Das sind die speziellen Werte der Riemannschen ζ-Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ an den positiven geraden Zahlen. Um das zu sehen bringen wir zuerst (12) in die Form

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}). \tag{14}$$

Nun entwickeln wir beide Seiten von (14) jeweils in eine Taylorreihe um $z = 0$, indem wir die die Entwicklung

$$\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

nutzen, die wir in einer früheren Hausaufgabe bewiesen haben (dabei sind $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ die Bernoulli-Zahlen). Nach einem Koeffizientenvergleich und Vereinfachung erhalten wir die Formel

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}.$$

Mit Hilfe der ersten Bernoulli-Zahlen $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$ erhalten wir

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$
$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},$$
$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Die ersten zwei Werte stimmen natürlich mit denen überein, die wir früher gefunden haben.

(e) Zeigen Sie, dass $\zeta(2k) = 1 + O(2^{-2k})$ für $k \to \infty$, und folgern Sie daraus, dass das asymptotische Verhalten der Bernoulli-Zahlen gegeben ist durch

$$B_{2k} = (1 + O(2^{-2k}))(-1)^{k+1} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}, \qquad k \to \infty.$$

Beachten Sie, das dies konsistent ist mit unserem früheren (und viel schwächeren) Ergebnis, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \frac{B_{2k}}{(2k)!} \right|^{1/2k} = \frac{1}{2\pi}.$$

27. Es sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion mit $\operatorname{grad} q \geq \operatorname{grad} p + 2$ (wobei $\operatorname{grad} p$ den Grad des Polynoms p bezeichne). Beweisen Sie, dass die Summe der Residuen $f(z)$ über alle ihre Pole gleich 0 ist.

28. (Eine Verallgemeinerung des Ergebnisses aus Problem 21) Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \ldots + a_0$ ein Polynom mit Grad n, so dass für ein $0 \leq k \leq n$ gilt

$$|a_k| > \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |a_j|.$$

Beweisen Sie, dass $p(z)$ genau k Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) in der Einheitskreisscheibe $|z| < 1$ hat.

29. **Leseempfehlung:** Gehen Sie zur *Mathematics Stack Exchange* website (https://math.stackexchange.com) und geben Sie „Rouche“ in das Suchfeld ein. Sie erhalten eine erheiternde Frageliste und Übungen mit Anwendungen des Satzes von Rouché zum Zählen von Polynom-Nullstellen und anderer analytischer Funktionen.

30. Zeigen Sie, wie der Satz von Rouché benutzt werden kann für einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dieser Beweis ist ein Weg zur Präzisierung des intuitiv überzeugenden „topologischen“ Beweises, den wir am Anfang der Vorlesung diskutierten.

31. (a) Skizzieren Sie ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \Omega$, $1, 2 \in \Omega$, und so, dass ein Zweig $F(z)$ der Logarithmus-Funktion auf Ω existiert mit der Eigenschaft

$$F(1) = 0, \qquad F(2) = \log 2 + 2\pi i$$

(dabei ist $\log 2 = 0.69314\ldots$ der natürliche Logarithmus von 2 im üblichen Verständnis der reellen Analysis).

(b) Allgemeiner sei $k \in \mathbb{Z}$. Würden wir die vorangehende Bedingung $F(2) = \log 2 + 2\pi i$ ersetzen durch die allgemeinere Bedingung $F(2) = \log 2 + 2\pi i k$, aber alle anderen Bedingungen beibehalten, gäbe es dann ein geeignetes einfach-zusammenhängendes Gebiet $\Omega = \Omega(k)$, für welches das möglich ist? Falls ja, wie sähe dieses Gebiet grob skizziert aus - als Funktion von k?

32. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Funktion:

i. Verhalten an halben ganzen Zahlen:

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

ii. Verdoppelungsformel:

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)=2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s).$$

iii.* Multiplikationssatz:

$$\Gamma\left(s\right)\Gamma\left(s+\tfrac{1}{k}\right)\Gamma\left(s+\tfrac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\left(s+\tfrac{k-1}{k}\right)=(2\pi)^{(k-1)/2}k^{1/2-ks}\Gamma(ks).$$

33. Für $n\geq 1$ sei V_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Berechnen Sie durch Auswertung des n-dimensionalen Integrals

$$A_n=\iint\ldots\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

auf zwei Arten die wohlbekannte Formel

$$V_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Bemerkung: Dieses Problem erfordert die Anwendung von etwas geometrischer Intuition (oder alternativ von etwas technischen Fertigkeiten mit sphärischen Koordinaten im $\mathbb{R}^n$). Eine Lösung findet man auf dieser Wikipedia-Seite .

34. Die **Beta-Funktion** ist eine Funktion $B(s,t)$ zweier komplexer Variabler, definiert für $\mathrm{Re}(s),\mathrm{Re}(t)>0$ durch

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx.$$

(a) (Warm-up) Überzeugen Sie sich, dass das uneigentliche Integral, welches $B(s,t)$ definiert, genau dann konvergiert, wenn $\mathrm{Re}(s),\mathrm{Re}(t)>0$.

(b) Zeigen Sie, dass $B(s,t)$ mit Hilfe der Gamma-Funktion ausgedrückt werden kann als

$$B(s,t)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.\qquad(\star)$$

Hinweis: Beginnen Sie damit, $\Gamma(s)\Gamma(t)$ als Doppelintegral auf dem positiven Quadranten $[0,\infty)^2$ of $\mathbb{R}^2$ (Sagen wir mit x und y als Integrations-Variablen) hinzuschreiben; dann machen Sie den Variablenwechsel $u=x+y$, $v=x/(x+y)$ und benutzen die Formel für Variablenwechsel für 2-dimensionale Integrale, um zu zeigen, dass der Wert des Integrals gleich $\Gamma(s+t)B(s,t)$ ist.

Bemerkung: Beachten Sie die Ähnlichkeit der Formeln bezüglich der Gamma- und der Beta-Funktion zur Formel $\binom{n}{k}=\frac{n}{k!(n-k)!}$; tatsächlich sehen wir mit Hilfe der Relation $\Gamma(m+1)=m!$ und der Funktionalgleichung $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ und mit Hilfe von $(*)$, dass für nicht-negative ganzzahlige Argumente gilt

$$B(n,m)^{-1}=\frac{nm}{n+m}\cdot\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}=\frac{nm}{n+m}\binom{n+m}{n}.$$

Mit anderen Worten: Abgesehen vom Korrekturfaktor $\frac{nm}{n+m}$, kann man sich die Inverse der Beta-Funktion vorstellen als eine natürliche Erweiterung der Binomial-Koeffizienten auf reell-wertige Argumente.

35. Die **Digamma-Funktion** $\psi(s)$ ist die logarithmische Ableitung

$$\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

der Gamma-Funktion und wird manchmal auch betrachtet als irgendwie wichtige spezielle Funktion an sich.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(s)$ die konvergenten Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\psi(s) &= -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n(n+s)} \\ &= -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+s} \right) \qquad (s \neq 0, -1, -2, \ldots).\end{aligned}$$

hat, wobei γ die Euler-Mascheronische Konstante ist.

(b) Zeigen Sie in äquivalenter Weise, dass $\psi(s)$ ausgedrückt werden kann als

$$\psi(s) = -\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+s} - \log n \right).$$

(c) Zeigen Sie, dass $\psi(s)$ folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$\psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s}.$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Das heißt, $\psi(x) + \gamma$ kann man sich vorstellen als Erweiterung der Definition von **harmonischen Zahlen** $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ auf nicht-ganzzahlige Argumente.

(e) Zeigen Sie: $\psi(s)$ erfüllt die Spiegelungsformel

$$\psi(1-s) - \psi(s) = \pi \cot(\pi s).$$

(f)* Jetzt zu einer lustigen Anwendung der Digamma-Funktion. Betrachte die Polynomfolge

$$P_n(x) = x(x-1)\ldots(x-n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und ihre Ableitungen

$$Q_n(x) = P_n'(x).$$

Beachte: Nach dem Satz von Rolle hat $Q_n(x)$ genau eine Nullstelle in jedem Intervall $(k, k+1)$ für $0 \leq k \leq n-1$. Diese Nullstelle bezeichnen wir mit $k + \alpha_{n,k}$, so dass die Zahlen $\alpha_{n,k}$ (die Bruchanteile der Nullstellen $Q_n(x)$) in $(0, 1)$ liegen.

Ein kurioses Phänomen ist nun beobachtbar beim numerischen Plotten der Punkte $\alpha_{n,k}$, $k = 0,\dots,n-1$ für große n-Werte, sagen wir für $n = 50$ (Abbildung 11(a)). Es scheint, dass sie sich für große n einer glatten Grenzkurve nähern. Das stimmt auch und tatsächlich ist folgende präzise Aussage beweisbar:

Satz. Sei $t \in (0,1)$. Weiter sei $k = k(n)$ eine Folge derart, dass $0 \le k(n) \le n-1$, $k(n) \to \infty$ as $n \to \infty$, $n - k(n) \to \infty$ für $n \to \infty$, und $k(n)/n \to t$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k(n)} = R(t) := \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-t}{t}\right)\right).$$

In der vorangehenden Formel bezieht sich arccot(·) auf den Zweig der inversen Kotangens-Funktion, welche Werte zwischen 0 und π annimmt. Die Grenzfunktion $R(t)$ ist zu sehen in Abbildung 11(b).

Beweisen Sie das!

Anleitung: Bilden Sie die logarithmische Ableitung von $P_n(x)$, um zu sehen, wann die $Q_n(x)/P_n(x) = 0$ (was äquivalent ist mit $Q_n(x) = 0$) gilt. Das ergibt eine Gleichung mit einer Summe von Termen. Versuchen Sie diese in zwei Gruppen so aufzuteilen, dass die Summe in jeder Gruppe mit der Digamma-Funktion, ausgewertet an einer bestimmten Stelle (mit Hilfe der vorangehenden Eigenschaft (b)), – in einem asymptotischen Sinne für $n \to \infty$ – in Verbindung gebracht werden kann. Machen Sie den Grenzübergang $n \to \infty$ und vereinfachen Sie dann mit Hilfe der Spiegelungsformel (Teil (c)).

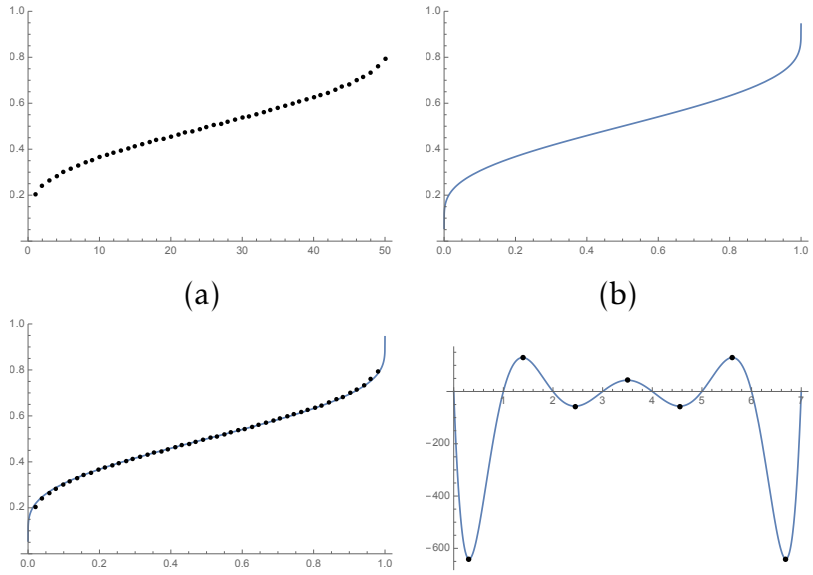


Abbildung 11: (a) Ein Plot der Bruchanteile der Nullstellen von $Q_n(x)$ für $n = 50$. (b) Die Grenzfunktion $R(t)$. (c) Kombination der zwei vorangeheden Plots. (d) Das Polynom $P_7(x)$. Beachte, dass die Nullstellen von $Q_7(x)$ den lokalen Minima und Maxima von $P_7(x)$ entsprechen, die besonders hervorgehoben sind.

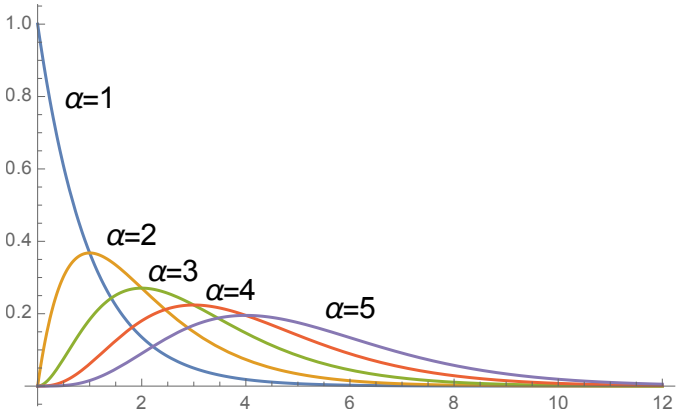


Abbildung 12: Die Gamma-Dichten $\gamma_\alpha(x)$ für $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$.

36. Gegeben seien zwei integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ einer *reellen* Variablen. Ihre **Konvolution** ist eine neue Funktion $h = f * g$, definiert durch die Formel

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wie Sie wissen, ist die Konvolution-Operation extrem wichtig in der harmonischen Analysis, da sie einer einfachen Multiplikation im Fourier-Bereich entspricht; in der Wahrscheinlichkeitstheorie entspricht sie der Addition unabhängiger Zufallsvariablen; in vielen anderen Bereichen der Mathematik, der Wissenschaft und des Ingenieurwesens kommt sie vor.

Für $\alpha > 0$ definieren wir die **Gamma-Dichte** mit Parameter α, bezeichnet als $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, als die Funktion

$$\gamma_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} x^{\alpha-1} 1_{[0,\infty)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(wobei $1_A(x)$ die charakteristische Funktion auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ bezeichnet; sie ist gleich 1 auf der Menge und gleich 0 außerhalb der Menge). Beachte, dass $\gamma_\alpha(x)$ die nichtnegative Funktion ist, deren Integral gleich $\Gamma(\alpha)$ ist, mit der Ausnahme, dass sie durch $\Gamma(\alpha)$ geteilt wird, so dass sie eine Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion wird. Siehe Abbildung 12 für eine Illustration.

Zeigen Sie: Für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt

$$\gamma_\alpha * \gamma_\beta = \gamma_{\alpha+\beta}.$$

Das heißt, dass die Familie der Dichte-Funktionen $(\gamma_\alpha)_{\alpha>0}$ unter der Konvolution-Operation abgeschlossen ist. Diese Tatsache ist einer der Gründe, warum die Familie der Gamma-Dichten eine sehr wichtige Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt und warum sie in vielen Anwendungen des echten Lebens auftritt.

37. (a) Zeigen Sie, dass die Laurent-Entwicklung von $\Gamma(s)$ um $s = 0$ folgende Form hat:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} - \gamma + O(s)$$

(dabei ist γ die Euler-Mascheroni-Konstante). Falls Sie überschüssige Energievorräte haben, können Sie die detailliertere Entwicklung

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} - \gamma + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}\right)s + O(s^2)$$

herleiten (händisch oder – falls Ihnen das mehr zusagt – mit Hilfe einer „symbolischen" Mathematik-Software wie Sagemath oder Mathematica) und so viele weitere Terme in der Entwicklung herleiten, wie sie wollen.

(b) Zeigen Sie, dass die Laurent-Entwicklung von $\zeta(s)$ um $s = 1$ folgende Form hat:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1).$$

38. Zeigen Sie, dass die symmetrische Version der Funktionalgleichung der Zeta-Funktion

$$\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s),$$

wobei $\zeta^*(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, umgeschrieben werden kann in in die äquivalente Form:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

39. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung der Digamma-Funktion $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ um $s = 1$ gegeben ist durch

$$\psi(s) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(n+1)(s-1)^n \qquad (|s-1| < 1).$$

40. Definieren Sie eine Funktion $D(s)$ einer komplexen Variablen s durch

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe, welche $D(s)$ definiert, gleichmäßig auf jeder Halbebene der Form $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha$ mit $\alpha > 0$ konvergiert, und folgern Sie, dass $D(s)$ definiert und holomorph ist auf der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $D(s)$ mit der Riemannschen Zeta-Funktion via folgende Formel verbunden ist:

$$D(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

(c) Leiten Sie mit Hilfe dieser Relation einen neuen Beweis her, dass die Zeta-Funktion analytisch fortsetzbar ist zu einer meromorphen Funktion auf $\mathrm{Re}(s) > 0$ mit einem einfachen Pol an $s = 1$ und Residuum 1, welche mit Ausnahme von $s = 1$ überall in der Halbebene analytisch ist.

41. Es bezeichne $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x}\log p$ von Mangoldt's gewichtete Primzahl-Zählfunktion. Zeigen Sie, dass $\psi(n) = \log \mathrm{kgV}(1,2,\ldots,n)$, wobei für ganze Zahlen $a_1,\ldots,a_k$ die Notation $\mathrm{kgV}(a_1,\ldots,a_k)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_1,\ldots,a_k$ bezeichne.

Beachte, dass dies bedeutet, dass eine zum Primzahlsatz äquivalente Formulierung die folgende interessante Aussage ist:

$$\mathrm{kgV}(1,\ldots,n) = e^{(1+o(1))n} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

42. (a) Beweisen Sie, dass für alle $x \geq 1$,

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \log x$$

(dabei läuft das Produkt über alle Primzahlen p, die kleiner oder gleich x sind.)

(b) Gehe zum Logarithmus über und beweise, dass für eine Konstante $K > 0$ die Schranke

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \geq \log\log x - K \qquad (x \geq 1)$$

gilt. Das bedeutet, dass die *harmonische Reihe der Primzahlen* $\sum_p \frac{1}{p}$ divergiert wie $\log\log x$ - im Kontrast zur üblichen harmonischen Reihe, die wie $\log x$ divergiert.

43. **Ein alternativer Beweis der Funktionalgleichung von Jacobi's theta-Funktion.** Erinnern Sie sich, dass wir im Teilabschnitt 15.1 die theta-Funktion Jacobi's definierten als

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \qquad (t > 0)$$

und zeigten, dass sie die Funktionalgleichung

$$\vartheta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\vartheta(t). \tag{15}$$

erfüllt.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Linienintegral

$$\oint_{\gamma_N} \frac{e^{-\pi z^2 t}}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz,$$

wobei γ_N das Rechteck mit den Scheiteln $\pm(N + 1/2) \pm i$ sei (mit einer positiven ganzen Zahl N). Machen Sie dann den Grenzübergang $N \to \infty$ und gewinnen Sie die Integral-Darstellung

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty - i}^{\infty - i} \frac{e^{-\pi z^2 t}}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz - \int_{-\infty + i}^{\infty + i} \frac{e^{-\pi z^2 t}}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz$$

für die Funktion $\vartheta(t)$.

(b) Entwickeln Sie in dieser Darstellung den Faktor $(e^{2\pi i z} - 1)^{-1}$ in eine geometrische Reihe in $e^{-2\pi i z}$ (für das erste Integral) und in eine geometrische Reihe in $e^{2\pi i z}$ (für das zweite Integral). Werten Sie die entstehende unendliche Reihe aus und rechtfertigen Sie alle Schritte, um einen alternativen Beweis für die Funktionalgleichung (15) zu erhalten.

44. (a) Beweisen Sie noch einmal den Satz 36 (die „Riemannsche Spielzeug-Hypothese", also die Aussage, dass die Riemannsche Zeta-Funktion keine Nullstellen hat auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$), indem Sie das Verhalten von

$$Y = \mathrm{Re}\left[-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}\right]$$

für fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\sigma \searrow 1$ betrachten, anstelle der Größe

$$X = \log|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)|.$$

Benutzen Sie die Reihenentwicklung

$$-\frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s},$$

wobei $\Lambda(n)$ die **von Mangoldt-Funktion** ist (sie ist gleich $\log p$, falls $n = p^k$ eine Primzahlpotenz ist, und 0 sonst).

(b) Versuchen Sie denselben Satz auf eine dritte Art zu beweisen, indem Sie

$$Z = \log|\zeta(\sigma)^{10}\zeta(\sigma+it)^{15}\zeta(\sigma+2it)^6\zeta(\sigma+3it)|,$$

untersuchen und noch einmal die Argumentation mit Entwicklung des Logarithmus in eine Potenzreihe ins Spiel bringen und herleiten, dass $Z \geq 0$. Führt das zu einem Beweis des Satzes? Falls nicht, was läuft falsch?

Hinweis: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 10a^4b^2 + 15a^3b^3 + 10a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

45. Definiere arithmetische Funktionen mit ganzzahligem Argument n wie folgt:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{if } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ ist ein Produkt von } k \text{ verschiedenen Primzahlen,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

(die Möbius-Funktion μ-),

$$d(n) = \sum_{d|n} 1, \qquad \text{(die Teiler-zählende Funktion),}$$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d, \qquad \text{(Die Teilersumme-Funktion),}$$

$$\phi(n) = \#\{1 \leq k \leq n-1 : \mathrm{ggT}(k,n) = 1\},$$

(die zahlentheoretische Eulersche φ-Funktion),

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{if } n = p^k,\ p \text{ prim,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{(die von Mangoldt } \Lambda\text{-Funktion).}$$

Wir sahen, dass die zeta-Funktion und ihre logarithmische Ableitung folgende Darstellungen als Dirichlet-Reihen haben:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

Nutzen Sie die Eulersche Produktformel für die zeta-Funktion oder andere elementare Manipulationen und zeigen Sie folgende Identitäten (gültig für $\mathrm{Re}(s) > 1$):

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log n \cdot n^{-s},$$
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s},$$
$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| n^{-s}.$$

Andere berühmte Darstellungen als Dirichlet-Reihen, die Sie vielleicht interessieren, sind

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) n^{-s},$$
$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) n^{-s},$$
$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) n^{-s}.$$

46. Sendov's Vermutung ist eine elementare, bislang nicht bewiesene Aussage des Mathematikers Blagovest Sendov in 1959. Er behauptet: Ist $p(z) = (z-z_1)\dots(z-z_n)$ ein komplexes Polynom mit Nullstellen z_j, $j = 1,\dots,n$, die alle in der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leq 1$ liegen, dann gibt es zu jeder Nullstelle z_j eine Nullstelle α der Ableitung $p'(z)$, für welche $|z_j - \alpha| \leq 1$.

    (a) Beweisen Sie die Vermutung für $n = 2$, also für quadratische Polynome.

    (b) Zeigen Sie, dass, wenn man in der Ungleichung $|z_j - \alpha| \leq 1$ die Zahl 1 durch eine kleinere ersetzt, die Behauptung falsch ist.

    (c) Beweisen Sie die Vermutung für den Fall $n = 3$, also für kubische Polynome. (Das ist nicht trivial! Für einen möglichen Beweis siehe das Papier [2].)

Projektvorschläge

1. **Funktionentheorie und selbstmeidende Pfade.** Es bezeichne a_n die Zahl der selbstmeidenden Pfade **selbstmeidender Pfad** der Länge n im quadratischen Gitter $\mathbb{Z}^2$ (d.h., Gitterpfade mit n Schritten), welche an $(0,0)$ starten. Es ist bekannt, dass $a_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ für eine Zahl μ und μ ist ungefähr gleich 2.638. Eine geschlossene Formel ist unbekannt und man vermutet nicht einmal, dass eine solche existiert. Aber für hexagonale Gitter ist ein präzises analoges Ergebnis bekannt: Es bezeichne b_n die Zahl der selbstmeidenden Pfade der Länge n mit dem Ursprung als Startpunkt, dann geht $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1.8477$. Das wird bewiesen im Papier [3]. Der Beweis ist elementar und benutzt Ideen aus der Funktionentheorie auf entscheidende Weise. eitere Details findet man im Artikel https://en.wikipedia.org/wiki/Connective_constant.

2. **Funktionentheorie und die Kunst von M. C. Escher.** Siehe Fig. 1 auf Seite 2 und die Referenzen [8], [10].

3. **Elliptische Funktionen und die Charakterisierung meromorpher Abbildungen auf dem komplexen Torus.** Im Problem 24 interessierte uns die Klassifikation der holomorphen Funktionen $f : M \to N$ für Riemannsche Flächen M, N. Wir gaben Antworten für mehrere interessante Flächenpaare (z.B. $M = \mathbb{C}$, $N = \hat{C}$, usw.). Den Fall der Riemannschen Flächen N gleich $\hat{\mathbb{C}}$ und M gleich dem komplexen Torus $\mathbb{C}/\Lambda$, wobei $\Lambda = \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ für eine komplexe Zahl $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ist ein besonders interessanes Beispiel einer solchen Fragestellung: In diesem Fall stellt sich heraus, dass die relevante Familie die elliptischen Funktionen sind (die auch als doppeltperiodische Funktionen bekannt sind). Mehr darüber können Sie lesen in [11, Ch. 9] und in [1, Ch. 1].

4. **Sendov's Vermutung.** Diese Vermutung wird in Problem 46 beschrieben und eignet sich für ein Projekt.

5. **Ein Thema für Fortgeschrittene aus der analytischen Kombinatorik.** Auf dem Gebiet der analytischen Kombinatorik benutzt man asymptotische Methoden aus der komplexen Analysis (sowohl aus der reellen als auch aus der komplexen Analysis), um das asymptotische Verhalten ganzzahliger Zahlenfolgen zu studieren, welche in der Kombinatorik auftreten (oder allgemeiner studiert man „ganzzahlige Arrays", Wahrscheinlichkeitsverteilungen - ähnlich der Diskussion in Abschnitt 17. Das Buch [5] ist eine exzellente Referenz für dieses Thema (sie auch [6]). Dort findet man viele Anregungen für ein Projekt.

6. **Der Jordansche Kurvensatz.** Dieser Satz behauptet, dass jede einfache, stetige, ebene Kurve die Ebene in zwei zusammenhängende Teilmengen zerlegt, von denen genau eine unbeschränkt ist. Der Satz spielt eine wichtige Rolle in der Funktionentheorie. Er wird diskutiert in Anhang B von [11]. Trotz seiner intuitiv plausiblen Aussage ist der Beweis nicht trivial, es gibt aber verschiedene Beweise in verschiedenen Quellen, z.B. in [11, Appendix B], [9] und in [12]. Ein Projekt könnte einen dieser Beweise darstellen und zusätzliche Aspekte - z.B. die Bedeutung des Satzes für die Funktionentheorie, höher-dimensionale Analoga, die Rolle des Satzes in offenen Problemen der Topologie

- darstellen und diskutieren. In https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem und in this MathOverflow discussion findet man dazu weitere Details.

Literaturempfehlung von Prof. Dan Romik

[1] T. Apostol. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer, 1990.

[2] G. L. Cohen, G. H. Smith.. A simple verification of Ilieff's conjecture for polynomials with three zeros. *Amer. Math. Monthly* 95 (1988), 734–737.

[3] H. Duminil-Copin, S. Smirnov. The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. *Ann. Math.* 175 (2012), 1653–1665.

[4] H. M. Edwards. Riemann's Zeta Function. Dover Publications, 2001.

[5] P. Flajolet, R. Sedgewick. Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, 2009.

[6] P. Flajolet, R. Sedgewick. Analytic Combinatorics — Online Course Materials. Online resource:
https://ac.cs.princeton.edu/online/. Accessed March 20, 2020.

[7] A. Ivić. The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications. Dover Publications, 2003.

[8] B. de Smit, H. W. Lenstra Jr. *Artful mathematics: the heritage of M.C. Escher*. *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), 446–457.

[9] R. Maehara. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem.. *Amer. Math. Monthly* 91 (1984), 641–643.

[10] D. Schattsschneider. The mathematical side of M. C. Escher. *Notices Amer. Math. Soc.* 57 (2010), 706–718.

[11] E. M. Stein, R. Shakarchi, Complex Analysis. Princeton University Press, 2003.

[12] H. Tverberg. A proof of the Jordan curve theorem. *Bull. London Math. Soc.* 12 (1980), 34–38.

[13] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly* 104 (1997), 705–708.

Literaturempfehlung an deutschen Universitäten

[1] Lars V. Ahlfors, Complex Analysis, 3. Aufl. (McGraw Hill. New York, 1979)

[2] Folkmar Bornemann* , Funktionentheorie, 2. Aufl. (Birkhäuser-Springer, 2016)

[3] Wolfgang Fischer*, Info Lieb, Funktionentheorie, 9. Aufl. (Vieweg, Braunschweig,2005)

[4] Otto Forster*, Funktionentheorie - Vorlesungsmitschrift (lecture notes), 2003-2013

[5] Otto Forster*, Zetafunktion und Riemannsche Vermutung – Vorlesungsmitschriften (notes of students), 2008–2009

[6] Otto Forster*, Riemannsche Flächen, (Springer 1977)

[7] Otto Forster, Lectures on Riemann Surfaces, 4. Aufl. (Springer 1999)

[8] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, 4. Aufl. (Springer Berlin, 2006)

[9] Andreas Gathmann, Funktionentheorie - Skript, 1. Aufl. (TU Kaiserslautern, 2016-2020), download

[10] Klaus Jänich**, Funktionentheorie, 6. Aufl (Springer, Berlin, 2004)

[11] Serge Lang, Complex Analysis, 4 Aufl. (Springer. New York, 1999)

[12] Tristan Needham, Visual Complex Analysis (Oxford University Press, New York, 1997)

[13] Reinhold Remmert**, Georg Schumacher, Funktionentheorie 1, 5. Aufl. (Springer, Berlin, 2002)

[14] Reinhold Remmert, Georg Schumacher, Funktionentheorie 2, 5. Aufl. (Springer, Berlin, 2007)

[15] Walter Rudin, Reelle und komplexe Analysis, 2. Aufl. (Oldenbourg, München, 2009)

Französische Literatur

[1] Ernst Hairer, Analyse Complexe, Université de Genève , https://www.unige.ch/~hairer/poly_analyse2/complexe.pdf (tolle Visualisierungen - nice visualizations, Riemann-Autograph auf Seite 8, weitere Literatur auf Seite 2)

[2] François de MARÇAY**, Analyse Complexe, (Université Paris-Sud, France). https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~merker/Enseignement/Analyse-Complexe/analyse-complexe-pdflatex.pdfdownload (tolle Visualisierungen, nice visualizations - e.g. open mapping theorem)