Des cercles aux courbures entières

Grâce à de récents progrès en théorie analytique des nombres, des mathématiciens ont résolu de nouveaux problèmes géométriques sur la courbure de cercles tangents emboîtés.

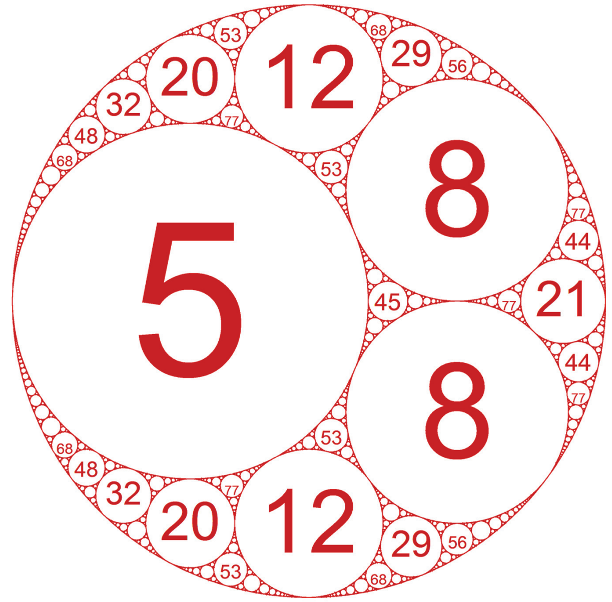
Elena Fuchs effectue ses recherches à l'université de Californie à Berkeley après une thèse à l'université de Princeton. Dans ses travaux, qui se situent à la croisée de la théorie des nombres et de la géométrie, elle étudie en particulier les propriétés arithmétiques de certains groupes.

sur le web

http://tinyurl.com/applet-apollonian-gasket

http://tinyurl.com/apollonian-circle-java-code
Deux applets interactives qui permettent de dessiner des cercles tangents dans différentes configurations

http://tinyurl.com/apollonian-fractal-wikibook
Un Wikibook (en anglais) sur la manière d'obtenir des badernes d'Apollonius



Baderne d'Apollonius définie par les quatre cercles les plus grands dont les courbures sont (– 3, 5, 8, 8). On construit alors jusqu'à l'infini des cercles tangents aux autres de plus en plus petits. La suite des courbures est entièrement composée de nombres entiers dont la répartition est maintenant mieux comprise.

Qu'a-t-on appris récemment sur les cercles tangents ?

E.F. Considérons trois cercles tangents deux à deux, il existe alors deux cercles tangents simultanément à ces trois cercles. Ainsi, si l'on part de quatre cercles tangents trois à trois, en construisant successivement le « cinquième cercle » tangent à trois choisis, on aboutit, en poursuivant à l'infini à une jolie figure fractale. Un fait remarquable est que si les courbures (inverses des rayons) des quatre premiers cercles sont entières, les courbures de tous les cercles suivants seront également des nombres entiers. Les questions auxquelles on a pu s'attaquer récemment concernent les propriétés de cette suite d'entiers. Par exemple, j'ai pu trouver une formule prédisant la quantité de nombres premiers qui apparaissent dans cette suite à une génération donnée [1].

Ce problème est-il ancien ?

E.F. Le problème géométrique est très ancien. Il y a plus de deux millénaires, Apollonius de Perga cherchait à dessiner des cercles tangents à d'autres cercles uniquement à l'aide d'une règle et d'un compas. C'est ainsi qu'il montra que partant de trois cercles mutuellement tangents, on pouvait construire exactement deux cercles tangents aux trois autres. C'est en répétant ce processus que l'on obtient la figure fractale baptisée baderne d'Apollonius. Si Apollonius ne s'intéressait qu'à la construction géométrique, René Descartes chercha lui un lien entre les courbures de ces cercles. Dans une lettre écrite en 1643 à la princesse Élisabeth de Bohême, Descartes donne la relation entre les courbures *a*, *b*, *c* et *d* de quatre cercles tangents trois à trois : $(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. De cette relation quadratique on déduit que partant de courbures qui sont des entiers, toutes les courbures des cercles tangents seront aussi des entiers. D'où le lien fort de ces constructions géométriques avec la théorie des nombres.

Pourquoi ce regain d'attention sur un problème aussi ancien ?

E.F. Étudiés aux cours du XXe siècle, les aspects arithmétiques des badernes d'Apollonius ont ressurgi dans une série d'articles remarquables publiés par cinq mathématiciens entre 2003 et 2007. En résolvant quelques problèmes et en posant une série de questions non triviales, ils ont inspiré beaucoup de mathématiciens, dont moi-même. En 2007, alors qu'il assistait à un séminaire où Peter Sarnak, de l'Institut des études avancées de Princeton, expliquait comment il avait avec d'autres élaboré la méthode du crible (lire « Une machinerie analytique », ci-dessus), Jeffrey Lagarias – l'un des cinq mathématiciens – s'aperçut que cette technique pouvait être appliquée aux badernes d'Apollonius.

Quel genre de problème peut être étudié en s'aidant de cette technique ?

E.F. Par exemple, cela a permis de trouver la formule asymptotique (c'est-à-dire le comportement pour de grandes valeurs de *x*) qui donne le nombre de cercles de courbure inférieure à *x* qui apparaissent dans n'importe quelle baderne donnée [2]. Beaucoup d'autres résultats ont été trouvés ces trois dernières années. J'ai aussi démontré que seuls certains nombres apparaissaient comme courbures d'une baderne donnée (définie par les courbures des quatre premiers cercles). Plus précisément, si on liste tous les nombres de la suite d'une baderne et qu'on calcule le reste de la division par 24 de ces nombres, on obtient toujours une liste de 24 nombres. En revanche, on ignore encore si les nombres apparaissent dans cette liste avec la même fréquence. ■ **Propos recueillis par Philippe Pajot**

[1] E. Fuchs, *Bull. of the American Math. Soc.*, *50*, 229, 2013.
[2] M. Lee et H. Oh, *Geom. Funct. Anal*, *23*, 580, 2013.

UNE MACHINERIE ANALYTIQUE

Le principe du crible affine présente des analogies avec celui du crible d'Ératosthène, méthode classique utilisée pour trouver les nombres premiers d'une liste. Beaucoup de méthodes de cribles sont utilisées en théorie analytique des nombres, par exemple pour compter dans une liste d'entiers ceux qui ont peu de facteurs premiers. Le crible affine fait ce type de décompte pour l'orbite de groupes particuliers. Il agit non pas sur le groupe lui-même, mais sur un vecteur aux coordonnées entières. On peut imaginer ce crible comme une machinerie qui compte les nombres premiers dans les grandes dimensions (les entiers étant de dimension 1). Le résultat d'Elena Fuchs peut alors se voir comme l'équivalent en grande dimension du fameux théorème des nombres premiers : si ce dernier stipule que la quantité de nombres premiers inférieurs à un nombre *x* donné s'approche du quotient *x/ln (x)* quand *x* tend vers l'infini, le crible affine est une manière de compter la quantité de coordonnées qui sont des nombres premiers pour les orbites de certains groupes associés aux badernes d'Apollonius.

Chronologie

200 avant notre ère Apollonius de Perga construit des cercles tangents emboîtés, ce qui autorise la construction d'une baderne d'Apollonius.

1643 René Descartes établit une relation entre les courbures de quatre cercles tangents mutuellement.

1936 Le chimiste Frederik Soddy (prix Nobel 1921) redécouvre la relation de Descartes dont il déduit que toutes les courbures des cercles d'une baderne partant de quatre courbures entières sont des entiers.

2003-2007 Ronald Graham, Jeffrey Lagarias, Colin Mallows, Allan Wilks et Catherine Yan étudient plusieurs aspects des badernes d'Apollonius, dont la théorie des groupes et la théorie des nombres.

2010-2013 Utilisant des techniques de théorie analytique des nombres, Elena Fuchs, Hee Oh, Alex Kontorovich, Peter Sarnak et Jean Bourgain notamment établissent de nouveaux résultats sur la répartition des nombres entiers qui apparaissent comme valeurs des courbures des cercles dans les badernes d'Apollonius.