

7. Übungsblatt und 2. Programmieraufgabe

Computerorientierte Mathematik

<http://www.math.uni-magdeburg.de/~mkoepp/lehre/coma-2003>

Abgabe der Übungsaufgaben: Donnerstag, 5. Juni, zu Beginn der Übung

Abgabe der Programmieraufgabe: bis Mittwoch, 18. Juni

23. Aufgabe

30 Punkte

Der Floyd-Warshall- (oder Tripel-) Algorithmus dient zur Bestimmung kürzester gerichteter Wege zwischen allen Knotenpaaren eines Digraphen. Es sind beliebige Kantengewichte zugelassen. Er arbeitet wie folgt:

Input: Eine Matrix $\mathbf{D} \in \overline{\mathbf{Q}}^{n \times n}$ der Bogengewichte $d_{i,j}$ zwischen den Knoten i und j , wobei $d_{i,j} = \infty$, falls kein Bogen (i, j) existiert.

Output: Eine Matrix $\mathbf{W} \in \overline{\mathbf{Q}}^{n \times n}$ der kürzesten Weglängen $w_{i,j}$ zwischen den Knoten i und j ; eine Matrix $\mathbf{E} \in \mathbf{N}_0^{n \times n}$ zur Rekonstruktion der kürzesten Wege.

for all $i \neq j$ **do** $w_{i,j} \leftarrow d_{i,j}$;

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do** $w_{i,i} \leftarrow \infty$;

for all i, j **do** $e_{i,j} \leftarrow 0$;

for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** $n, i \neq j$, **do**

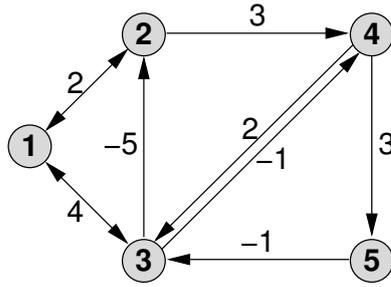
for $k \leftarrow 1$ **to** $n, k \neq j$, **do**

if $w_{i,j} + w_{j,k} < w_{i,k}$ **then**

$w_{i,k} \leftarrow w_{i,j} + w_{j,k}$;

$e_{i,k} \leftarrow j$;

- (a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Floyd-Warshall-Algorithmus in dem unten stehenden Graphen kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren. Geben Sie dazu jeweils die Kürzeste-Weglängen-Matrix \mathbf{W}^j nach Durchlauf der j -ten Iteration sowie die zugehörige Matrix \mathbf{E}^j an.

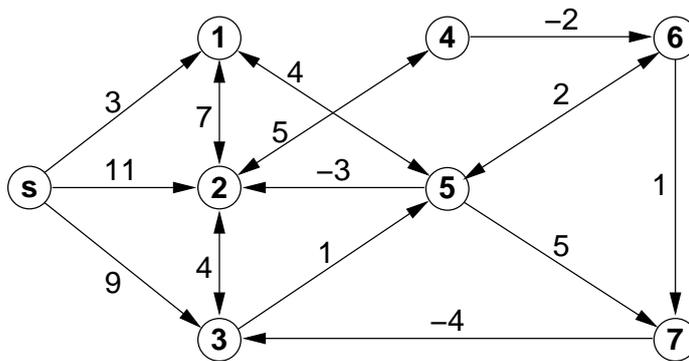


- (b) Zeigen Sie: Der Algorithmus arbeitet korrekt, wenn $d_{i,k} \geq 0$ für alle i, k gilt.
 Hinweis: Zeigen Sie per Induktion über j , daß \mathbf{W}^j die Längen der kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren enthält, wobei nur Wege mit inneren Knoten mit Index $\leq j$ berücksichtigt werden.
- (c) Wie kann aus der Matrix \mathbf{E} für gegebene i, k ein kürzester Weg von i nach k rekonstruiert werden? Führen Sie diese Rekonstruktion für den Weg von 1 nach 5 aus.
 Hinweis: $e_{i,k}$ ist der höchste Index eines inneren Knotens auf dem kürzesten Weg von i nach k ; Rekursion.
- (d) Wie erkennt man die Situation, daß der Digraph einen gerichteten Kreis negativen Gewichts enthält?
- (e) Geben Sie eine obere asymptotische Abschätzung für die Laufzeit des Algorithmus an.

24. Aufgabe

10 Punkte

Wenden Sie den Algorithmus von Yen auf den folgenden Graphen an.



2. (und letzte) Programmieraufgabe

Implementieren Sie den Dijkstra-Algorithmus zur Berechnung kürzester Wege in Graphen mit nichtnegativen Kantengewichten als C-Programm. Greifen Sie dazu auf die für den Depth-First-Search-Algorithmus definierte Adjazenzliste zur Speicherung von Graphen zurück.

Als Input soll Ihr Programm zunächst den Graphen G und einen Startknoten u erhalten. Er soll einen Kürzeste-Wege-Baum für den Startknoten u berechnen und dann die Eingabe eines oder mehrerer Endknoten v erlauben, für die jeweils ein kürzester Weg von u nach v und dessen Länge ausgegeben wird.

Testen Sie Ihr Verfahren zuerst an den kleineren Beispielen, bei der Abgabe sollten Sie allerdings auch die größeren Graphen erfolgreich bearbeiten können.